

Elemi matematika 3. - MTN424g

A NEVEZETES KÖZEPEK KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉGEK KÉT TAGRA

1. Feladat. Legyen $a, b > 0$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$H(a; b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} \leq G(a; b) = \sqrt{ab} \leq A(a; b) = \frac{a+b}{2} \leq Q(a; b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy a trapéz középvonalának hossza az alapjai hosszának számtani közepe.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy annak, az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely a trapézt két hasonló trapézra bontja, az alapjai hosszának mértani közepe.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza a trapéz alapjai hosszának harmonikus közepe.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy annak, az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely a trapézt két egyenlő területű trapézra bontja, az alapjai hosszának négyzetes közepe.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív, akkor

$$G(a; b) = \sqrt{A(a; b) \cdot H(a; b)}.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív, akkor

$$G(a; b) = G(H(a; b); A(a; b)).$$

8. Feladat*. Az a, b pozitív mennyiségek n -edik hatványközepe ($n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$): $K_n(a; b) = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$. Igazoljuk, hogy

$$K_2(a; b) \leq K_3(a; b).$$

(Ha $n = 1$, a mértani, ha $n = 2$, a négyzetes, ha $n = -1$, a harmonikus közeget kapjuk, ha pedig $n = \frac{1}{3}$, az ún. Lorentz-közeget.)

9. Feladat*. Az $a, b > 0$ számokra $L(a; b) = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$, ha $a \neq b$; a , ha $a = b$ -t a és b logaritmusos közepének nevezzük. Igazoljuk, hogy ha $a, b > 0$, akkor $G(a; b) \leq L(a; b) \leq A(a; b)$.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x, y > 0$ és $x + y = 1$, akkor

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

11. Feladat. (a) Legyen $a + b = 42$. Mikor lesz $a^2 + b^2$ minimális?

(b) Egy 50 cm hosszú szakaszt két részre osztva, az egyes részek fölé négyzeteket írtunk. Hogyan osszuk két részre a szakaszt, hogy a négyzetek területének összege minimális legyen?

(c) Egy 120 cm-es szalagot hol vágjunk ketté, hogy az egyes részekből hajtható négyzetek területének összege minimális legyen?

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk $H(x; y) \leq A(x; y)$ -t.

13. Feladat. Oldj meg a

$$\frac{6^x}{2^x + 3^x} + \frac{15^x}{3^x + 5^x} + \frac{10^x}{5^x + 2^x} = \frac{2^x + 3^x + 5^x}{2}$$

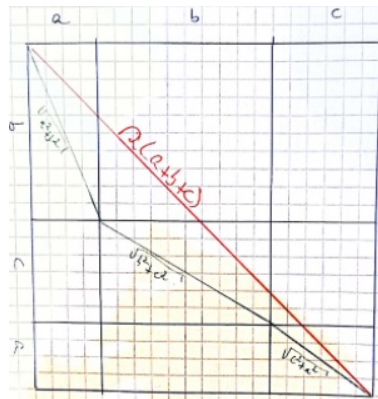
egyenletet.

Ötlet. Alkalmazzuk a harmonikus, számtani közepek közötti egyenlőtlenséget.

14. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c).$$

Ötlet. $A(a; b) \leq Q(a; b)$, vagy



15. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2 + (1 - b)^2} + \sqrt{b^2 + (1 - c)^2} + \sqrt{c^2 + (1 - a)^2} \geq \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

16. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha $a_1; a_2; \dots; a_n$ pozitív, akkor

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}.$$

Ötlet. Ha a baloldali összeg számlálójában cikikusan eggyel növeljük a tag indexét, az összeg nem változik.

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

17. Feladat. Tudjuk, hogy a háromszög A csúcsából húzott magassága harmonikus közepe annak a két szakasznak, amelyekre a magasság a BC oldalt bontja. Mekkora $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$?

18. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a < \frac{b+c}{2}$, akkor $s_a > \frac{s_b + s_c}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása? (Spoiler: nem.)

Ötlet. Használjuk, hogy $s_a = \frac{1}{2}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

19. Feladat. Az ABC derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel élve határozzuk meg

$$\frac{s_a + s_b}{s_c}$$

maximumát.