Elemi matematika 1. - MTN224g
DIOFANTOSZI EGYENLETEK

1. BEVEZETŐ FELADATOK

1. Feladat. Oldjuk meg az $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ egyenletet, ha tudjuk, hogy x, y, z, u ebben a sorrendben, egymást követő egész számok.

2. Feladat. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán! $yx + y + x = 1992$

Ötlet. Alakítsunk szorzattá, az 1993 prím.

« FELVÉTELI FELADAT A SÁGVÁRIBA (SZEGED) 1994/7 »

3. Feladat. Oldjuk meg az $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3$ egyenletet az egész számok halmazán.

Ötlet. Teljes négyzetté kiegészítés.

4. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} = 1$.

Ötlet. Mivel $a, b, > 1$ becsüljünk.

5. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1000$.

Ötlet. Alakítsunk szorzattá.

6. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

7. Feladat. Oldjuk meg az egészek halmazán az $a+b+c = 31, a^2+b^2+c^2 = 325$ egyenletekből álló egyenletrendszert.

Ötlet. Hozzunk létre $(a - b)^2$ jellegű kifejezéseket.

8. Feladat. Oldjuk meg az egészek halmazán az $a+b+c = 7, a^3+b^3+c^3 = 1$ egyenletrendszert.

Ötlet. $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

9. Feladat. Egy háromjegyű számból 561-et levonva, jegyei összegének 34-szeresét kapjuk. Melyik ez a szám?

10. Feladat. Ha egy háromjegyű, tízes számrendszerbeli számot elosztunk a fordítottjával, hányadosul 3-at, maradékul pedig a szám számjegyeinek összegét kapjuk. Mi lehet ez a szám?

Megoldás. 441, 882.

« KöMaL C. 425. »

2. OSZTHATÓSÁGI VIZSGÁLATTAL MEGOLDHATÓ EGYENLETEK

11. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán:
(a) $xy(x + y) = 2017$,
(b) $2016^a + 2017^b = 2018^c$,
(c) $x^2y^3 = x^3y^2 + 2017$.
Alkossunk a fenteik alapján saját, hasonló feladatokat!

12. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $a^3 - a = 3b^2 + 2018$.

Ötlet. Gondoljunk a két oldal 3-as maradékára.

13. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán

(a) $3x^2 - 4y^2 = 13$,
(b) $2^x + 7^y = 19^z$.

A fentiek alapján alkossunk hasonló feladatokat.

14. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^3 + 6x^2 + 5x = 27y^3 + 9y^2 + 9y + 1$ egyenletet.

15. Feladat. Oldjuk meg: $x^2 - 2xy = 10^6 - 10$.

16. Feladat. Állítsuk elő a 2006-ot két négyzetszám összegeként!

17. Feladat. Igazoljuk, hogy az $n^2 + m^2 = 111111$ egyenletnek nincs megoldása az egész számpárok halmazán.

Ötlet. Paritás, négyes maradék.

18. Feladat. Keressük meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, melynek jegyeit eggyel megnövelve szintén négyzetszámot kapunk.

Ötlet. $1111 = 101 \cdot 11$.

19. Feladat. Oldjuk meg: $15x^2 - 7y^2 = 9$.

20. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $5^n + 11^n = 12^n$.

Ötlet. $a^n - b^n = (a - b) \cdot \ldots$.

3. Diofantoszi egyenletre vezető különböző „szöveges” feladatok

21. Feladat. Egy szülinapi zsúron 9-en vettek részt, mindenki azonos számú süteményt evett és kimaradt 2 szelet. Ha csak 6-an lettek volna és szintén mindenki egyformán fogyaszt, akkor is 2 szelet maradt volna ki. Hány szelet sütemény készült a zsúrra, ha tudjuk, hogy 40-nél kevesebb készült?

« Felvételi feladat a Ságváriba (Szeged) 1998/7 »

22. Feladat. Egy általános iskola egyik őrse expedícióra indul. A kitűzött helyre érve felverik sátraikat. Ha minden sátorba egy személy megy, akkor 13 úttörő hely nélkül marad, ha 8 személy megy, akkor egy sátor üresen marad. Hányan voltak az őrsben? Hány sátor volt?

« Felvételi feladat a Ságváriba (Szeged) 1976/2 »

23. Feladat. Egy sakkversenyen két hetedik osztályos és néhány nyolcadik osztályos tanuló vett részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott. A két hetedik osztályos együtt szerzett nyolc pontot, a nyolcadik osztályosok pedig mind egyenlő számú pontot szereztek. Hány nyolcadikos vett részt a versenyen? (A sakkban a döntetlenért fél-fél pont jár, a vereségért nem jár pont, a győzelemért egy pont jár.)

Ötlet. Írjuk fel a mérkőzések számát kétféle módon.

24. Feladat. Egy sakkversenyen kilencedikesek és tizedikesek vettek részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. A tizedikesek tízszer annyian voltak, mint a kilencedikesek, és együtt 4,5-szer annyi pontot gyűjtöttek, mint a kilencedikesek. Hány kilencedikes, és hány tizedikes indult a versenyen?

4. Feladatok faktoriálissal

25. Feladat. Oldjuk meg az $n! + 3 = x^2$ egyenletet, ahol $n, x, \in \mathbb{N}^+$.

26. Feladat. Az előző feladatban milyen értéket írhatunk még a 3 helyett?

27. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $(n! + 1)(m! + 1) = (n + m)!$

28. Feladat. Oldjuk meg az $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$ egyenletet.

29. Feladat*. Oldjuk meg az $1! + 2! + \ldots + n! = m^l$ egyenletet, ha $l > 2$.

30. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x! + y! = z!$ egyenletet.

Ötlet. Feltehető: $x \leq y < z$. Ekkor $x!$-al osztva...

31. Feladat. Oldjuk meg az $a! + b! + c! = \overline{abc}$ egyenletet.

Megoldás. Biztos, hogy $a, b, c < 7$, mert 7! négyjegyű. Így $\overline{abc} < 666$, viszont $6! = 720$, így $a, b, c < 6$. 5 biztos van a számjegyek között, mert $3 \cdot 4!$ csak kétjegyű. Mivel $3 \cdot 5! = 360$, így $a \leq 3$. Ha $a = 3$, nem lehet, mert $3! + 2 \cdot 5! = 260$. Ha viszont $a = 2$ és a másik két jegy 5: $2! + 5! + 5! = 242$, nem megoldás. Így nem mindkét jegy 5. Ekkor viszont: $2! + 4! + 5! = 146$, azaz, a nem lehet 2. Vagyis $a = 1$. Ekkor a 145 megoldás is, s ekkor $b \leq 4, c = 5$ eseteket kipróbálva adódik, hogy nincs több megoldás.

5. További feladatok

32. Feladat.
(a) Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x(y + 1)^4 = 243y$ egyenletet.
(b) Oldjuk meg az egyenletet az egész számok halmazán is.
(c) Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x(y + 1)^n = 243y$ egyenletet.
A megoldás mintájára alkossunk hasonló feladatokat.

Ötlet. A szomszédos pozitív egészek relatív prímek.

33. Feladat. Hány megoldása van a pozitív egészek halmazán az $3^x + 5^y = 8z - 2$ egyenletnek?

Ötlet. Vizsgáljuk a kitevők paritását.

34. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x^3 + 7y = y^3 + 7x$ egyenletet, ha $x \neq y$.

35. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1988}$ egyenletet.

Megoldás. $x = y = 7 \cdot 71$.

36. Feladat. Oldjuk meg az $x + y + z = 3xyz$ egyenletet a pozitív egészek halmazán!

Ötlet. Feltehető: $x \leq y \leq z$ Ekkor $3xyz = x + y + z \leq 3z$.

37. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ egyenletet.

38. Feladat. Oldjuk meg az $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

Megoldás. $x = y = 0; x = 1, y = 2$.

39. Feladat. Oldjuk meg a $3^y = 1 + 2^x$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

Megoldás. $y = 2, x = 3$.

40. Feladat. Oldjuk meg a pozitív számok halmazán: $x^2 + y^2 = z^2$.

Megoldás. Elég azokkal az esetekkel foglalkoznunk, amikor $(x, y, z) = 1$. Ekkor számaink páronként is relatív prímek. Könnyen látható, hogy a baloldal egyik tagja páros, másik páratlan és más eset nem is lehetséges. Legyen $x = 2x_1$. Így $x_1^2 = \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$. Legyen $\frac{y+z}{2} = u$ és $\frac{z-y}{2} = v$. Ekkor persze mivel y, z relatív prímek, u és v is azok. De $x_1^2 = uv$ miatt ez azt jelenti, hogy négyzetszámok is. Ekkor ha $u = m^2$ és $v = n^2$, azt kapjuk, hogy $x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$.

41. Feladat. Igazoljuk, hogy minden pitagoraszi számhármasnak van a) 3-mal, b) 4-gyel, c) 5-tel osztható eleme.

42. Feladat. Van-e olyan derékszögű háromszög, amely oldalainak hosszai egész számok és az átfogóhoz tartozó magasság hossza 2/3-a az egyik befogó hosszának?

6. Feladatok a végtelen leszállás módszerére

43. Feladat. Oldjuk meg: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$, $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

Megoldás. Könnyen belátható, hogy x, y, z páros kell, hogy legyen. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x \leq y \leq z$. Tegyük fel, hogy van pozitív megoldás: (x_0, y_0, z_0). Ekkor azonban $x_0 = 2x_1$, s.í.t. a többi ismeretlenre is. Ekkor: $4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1$, ahonnan az előzőekhez hasonlóan látszik, hogy x_1, y_1, z_1 páros. S.í.t., azt kapjuk, x, y, z kettő akárhanyadik hatványával osztható, ami ellentmondás..

44. Feladat. Oldjuk meg az $x^3+2y^3+4z^3-6xyz = 0$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

45. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $x^2 + y^2 = 4^z$.

7. Difantoszi egyenletre vezető feladatok a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny feladataiból

46. Feladat. Határozzuk meg az x, y egész számokat, ha $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y^3 = 0$.

Megoldás. Némi átalakítás után az egyenlet

$$(x - y)^2 = y^2(4y - 1)$$

alakba írható. $y = 0$-ból $x = 0$ következik, és ez láthatóan megoldás is. Ha $y \neq 0$, akkor $4y - 1$ négyzetszám, de egy négyzetszám 4-es maradéka mindig 0 vagy 1. Tehát az egyetlen megoldás $x = y = 0$.

« NMMV 1992. 9/5 »

47. Feladat. Határozzuk meg az a és b egész számokat, amelyekre az $x^2 - ax + 2a + b^2 = 0$ egyenlet gyökei közvetlen egymás utáni természetes számok!

Ötlet. Használjuk a Viète-formulákat, majd alakítsunk szorzattá.

« NMMV 2003. 10/1 »

48. Feladat*. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^y - x = y^x - y$ egyenletet.

Megoldás. Nyilvánvaló módon megoldás, ha a két változó megegyezik (ekkor a két oldal formálisan ugyanaz), illetve ha valamelyik változó 1 (ekkor mindkét oldal 0). Az általánosság megszorítás nélkül tegyük föl, hogy $1 < x < y$, és jelöljük az $y - x$ különbséget t-vel. Az eredeti egyenlet új jelölésünkkel és átrendezve a következő alakú:

$$x^{x+t} + x + t = (x+t)^x + x$$

Mindkét oldalt x^x-szel elosztva ($x \neq 0$)

$$x^t + tx^{-x} = \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x < e^t,$$

mivel az $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ sorozat monoton nőve tart e^k-hoz. Ebből viszont $x^t < e^t$, abból pedig $x < e$ következik, tehát $e < 3$ miatt $x = 1$ vagy $x = 2$ képzelhető el csak. $x = 1$-re már tudjuk, hogy minden y megoldást ad. $x = 2$, $y = 3$ megoldás, de ha $y > 3$, akkor nem kaphatunk megoldást, hiszen $2^y > y^2 - y + 2$ miatt soha nem állhat fönt egyenlőség (az állítás y szerinti teljes indukcióval bizonyítható). Így megoldást akkor kapunk, ha az egyik változó 2, a másik pedig 3, ha valamelyik változó 1, illetve ha a két változó egyenlő. Ezzel a feladatot megoldottuk.

« NMMV 1996. 11/2 »

49. Feladat. Melyek azok a természetes n számok, melyekre $n^2 - 440$ teljes négyzet?

« NMMV 2004. 10/3 »

50. Feladat. Létezik-e olyan x és y természetes szám, melyekre $7^x - 5^y = 2004$?

Ötlet. Használjuk a $(7^x + 1) - (5^y - 1) = 2006$, és a $(7^x - 1) - (5^y + 1) = 2002$ alakokat, majd vizsgáljuk a kitevők paritását.

« NMMV 2004. 10/4 »

51. Feladat*. Legyen $n > 1$ természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív természetes számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 x_3 \dots x_n &= 1997 \\ x_2 + x_1 x_3 \dots x_n &= 1997 \\ &\vdots \\ x_n + x_1 x_2 \dots x_{n-1} &= 1997 \end{aligned}$$

Megoldás. $n = 2$-re az egyenletrendszer $x_1 + x_2 = 1997$ formára egyszerűsödik, ennek megoldása: $\{(x_1; 1997 - x_1) | x_1 \in 1, 2, \dots, 1996\}$. Amennyiben $n > 2$, és van x_i, x_j, amelyek különbözők, akkor

$$x_i + x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = x_j + x_1 x_2 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n$$

azt jelenti, hogy átrendezve

$$(x_i - x_j)(x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n - 1) = 0$$

Feltettük, hogy $x_i \neq x_j$, azért az összes x_k, ahol $k \neq i, j$, egyenlő 1-gyel, hiszen természetes számok. Az egyenletrendszer ekkor

$$x_i + x_j = 1997, \quad 1 + x_i x_j = 1997$$

formára egyszerűsödik, aminek két egész megoldása van: $x_i = 1996, x_j = 1$ és $x_i = 1, x_j = 1996$. Tehát a megoldás egy tetszőleges eleme 1996, a többi 1.

Ha minden elem egyenlő, akkor az összes egyenlet (x-szel jelölve a közös értéket) $x+x^{n-1} = 1997$ alakú lenne, tehát $x(1+x^{n-2}) = 1997$ alakú, de mivel az 1997 prímszám, ezért ez csak $x = 1$ vagy $x = 1997$ esetén lehetne, igaz, ezek az értékek azonban könnyen láthatóan nem lesznek megfelelőek.

« NMMV 1997. 10/4 »

52. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

Ötlet. Jussunk el az $(x-23)(x^2+y^2+2) = 1803 = 3 \cdot 601$ alakig.

« NMMV 1999. 12/3 »

53. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000.$$

Ötlet. Jussunk el az $\left[1-(x-y)^2\right](x+y-1) = 1999$ (prím) alakig.

« NMMV 2000. 9/6 »

54. Feladat. Adjuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármasokat, amelyekre

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2001.$$

Ötlet. $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$

« NMMV 2001. 9/2 »

55. Feladat. Az

$$\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \ldots, \frac{2000}{3}, \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$$

számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

Ötlet. Nem. Próbálkozzunk indirekten.

« NMMV 2002. 11/1 »

56. Feladat. Hány megoldása van az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$ egyenletnek?

« NMMV 2005. 12/1 »

57. Feladat. Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa kerülete mérőszámának.

Megoldás. A feltétel azt jelenti, hogy $3(a+b+c) = \frac{ab}{2}$, amiből $c = \frac{ab}{6} - (a+b)$ következik. A háromszögünk derékszögű, ez azt jelenti, hogy $a^2 + b^2 = c^2$. Helyettesítsük be most ebbe c értékét!

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{ab}{6} - (a+b)\right)^2 = \frac{a^2b^2}{36} - \frac{ab}{3}(a+b) + a^2 + 2ab + b^2,$$

egyszerűbb alakra hozva $\frac{a^2b^2}{36} - \frac{ab}{3}(a+b) + 2ab = 0$. Rendezzünk át és egyszerűsítsünk ab-vel!

$$ab - 12(a+b) + 72 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(a-12)(b-12) = 72.$$

A 72-t a sorrendet is figyelembe véve 12-féleképp lehet pozitív számok szorzatává bontani. A megoldások a következők:

$a - 12 = 1$, $b - 12 = 72$. Ekkor $a = 13, b = 84, c = 85$.

$a - 12 = 9$, $b - 12 = 8$. Ekkor $a = 21, b = 20, c = 29$.
$a - 12 = 3$, $b - 12 = 24$. Ekkor $a = 15, b = 36, c = 39$.
$a - 12 = 4$, $b - 12 = 18$. Ekkor $a = 16, b = 30, c = 34$.
$a - 12 = 6$, $b - 12 = 12$. Ekkor $a = 18, b = 24, c = 30$.
$a - 12 = 36$, $b - 12 = 2$. Ekkor $a = 48, b = 14, c = 50$.

Ellenőrizhető, hogy ezek a számhármasok valóban kielégítik az egyenletet, ha pedig a-t és b-t fölcseréljük, ezekkel egybevágó háromszögeket kapunk. A negatív szorzattá bontások közül kettő felel meg, a $(-8) \cdot (-9)$ és a $(-9) \cdot (-8)$, de a kapott 3,4,5 oldalú háromszög nem felel meg a kezdeti feltételnek.

« NMMV 2001. 10/2 »

58. Feladat. Hány megoldása van az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2001}$$

egyenletnek az egész számok körében?

Megoldás. Az $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n$ háromismeretlenes diofantoszi egyenlet megoldásai csupa páros számok. Ez a következőképp látható be: tegyük fel, hogy két páratlan és egy páros szám van, azaz $x = 2x_1 + 1$, $y = 2y_1 + 1$, $z = 2z_1$. Ekkor az egyenlet alakja a következő:

$$(2x_1 + 1)^2 + (2y_1 + 1)^2 + (2z)^2 = 2^n$$

$$2(x_1^2 + x_1 + y_1^2 + y_1 + z_1) = 2^{n-1} - 1$$

Tehát egy páros szám egyenlő lenne egy páratlannal, ami létezhetetlen. Ez azt jelenti, hogy mindhárom ismeretlennek párosnak kell lennie. Ekkor az egyenlet mindkét oldalát leoszthatjuk 4-gyel:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{n-2}$$

Ismételjük meg ugyanezt az eljárást, végül arra jutunk $n = 2001$ esetén, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2,$$

ahol $x = a \cdot 2^{1000}$, $y = b \cdot 2^{1000}$, $z = c \cdot 2^{1000}$. Az egyenlet egész megoldásai úgy adódnak, hogy két változó értéke ± 1, a harmadik pedig 0. Ennek alapján az eredeti egyenlet megoldását úgy kapjuk, hogy két változó $\pm 2^{1000}$, a harmadik pedig 0.

« NMMV 2001. 11/1 »

8. Kiegészítés: lineáris diofantoszi egyenletek

Az $ax + by = c$ alakú diofantoszi egyenlet megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy $(a, b)|c$ teljesüljön. A szükségesség nyilvánvaló, az elegendőség pedig azon múlik, hogy euklideszi-gyűrűkben, adott a, b esetén léteznek olyan x, y elemek, hogy $ax + by = (a, b)$ fennálljon. (Ez az a, b-n végzett euklideszi algoritmusból egyszerűen adódik.) Ekkor $\frac{c}{(a,b)}$ -vel beszorozva az eredeti egyenlet egy megoldását kapjuk. Természetesként merül fel a kérdés, ha az egyenlet megoldható és például a fenti módszerrel találtunk is egy megoldást, van-e több?

Az általános megoldás kétváltozós esetben

Tétel: Legyen x_0, y_0 az $ax + by = c$ alakú diofantoszi egyenlet egy megoldása. Ekkor az egyenlet összes megoldása előáll $x = x_0 + \frac{b}{(a,b)} \cdot t$, $y = y_0 - \frac{a}{(a,b)} \cdot t$ alakban, ahol $t \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás: A bizonyítás két részből áll. Elsőként azt kell igazolni, hogy a fentiek tényleg megoldások tetszőleges egész t esetén, ez az eredeti egyenletbe történő visszahelyettesítéssel egyszerűen igazolható. A második rész annak megmutatásából áll, hogy az összes megoldás előáll a fenti alakban. Ez a következőképp történhet. Legyen x_0, y_0 és x, y a fenti egyenlet egy-egy megoldása. Ekkor $ax+by=c$ és $ax_0+by_0=c$ is fönnáll. A két egyenlet különbségét véve $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ adódik. Ezt végigosztva a, b nemnulla legnagyobb közös osztójával, átrendezve az $\frac{a}{(a,b)}(x-x_0)=\frac{b}{(a,b)}(y_0-y)$ egyenlethez jutunk. Mivel $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)})=1$, kapjuk, hogy $\frac{a}{(a,b)}|y_0-y$ és $\frac{b}{(a,b)}|x-x_0$. Léteznek tehát olyan t és t' egész számok, hogy $x-x_0=t\cdot\frac{b}{(a,b)}$ és $y_0-y=t'\cdot\frac{a}{(a,b)}$. Be kell még látni, hogy $t=t'$. Ez az $\frac{a}{(a,b)}(x-x_0)=\frac{b}{(a,b)}(y_0-y)$ egyenletbe történő visszahelyettesítéssel egyszerűen megtehető.

A megoldás három módja:

Tekintsük a $3x+7y=13$ diofantoszi egyenletet.

(a) **(euklideszi-algoritmus)** A tételben foglaltak szerint végezzünk euklideszi algoritmust a 3 és a 7 legnagyobb közös osztójának megkeresésére. Ez a következő: $7=2\cdot 3+1$, $3=3\cdot 3+0$ így kapjuk, (3, 7)=1. Ez nyilván osztója a 13-nak így van megoldás. Egy ú.n. partikuláris megoldás megtalálható tehát a következő módon: $1=7-2\cdot 3$. (A helyzet most azárt ilyen egyszerű mert viszonylag kevés lépésben leállt az algoritmus.) Azaz $13=13\cdot 7-26\cdot 3$. Egy megoldás tehát: $x_0=-26, y_0=13$. Így az összes megoldást megadhatjuk a $x=-26+7t, y=13-3t$ alakban.

(b) **(fokozatos csökkentés)** Fejezzük ki az egyik ismeretlent a másik segítségével. Legyen például ez az x. Ekkor $x=\frac{13-7y}{3}=4-2y+\frac{1-y}{3}$. Mivel x egész, $\frac{1-y}{3}$ is egész, vagyis $3|1-y$, azaz létezik olyan s egész szám, hogy $s=\frac{1-y}{3}$, vagyis $y=1-3s$. Ezt x előbbi előállításába visszahelyettesítve $x=2+7s$ adódik. Megadtuk ismét az összes megoldást az s egész paraméter segítségével.

(c) **(kongruenciák)** Ha $3x+7y=13$ fennáll, akkor triviális, hogy teljesül a $3x+7y\equiv 13 (\mathrm{mod}\ 3)$ kongruencia is. Ez utóbbiból $7y\equiv 13(\mathrm{mod}\ 3)$, ahonnan $y\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ nyerhető. Vagyis $y=3t+1$ alakú, ahol $t\in\mathbb{Z}$. Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $x=2-7t$.

A fentiek során bár különböző alakban, de természetesen ugyanazokat a megoldásokat kaptuk. Az is nyilvánvaló, hogy elég csak azokkal az egyenletekkel foglalkozni, ahol $(a;b)=1$. Bár az utolsó módszer használja a kongruenciákat, előnye, hogy segítségével többismeretlenes egyenletek is megoldhatók.

Az általános megoldás n-változós esetben:

Tétel: Legyen $n\geq 2$. Ekkor az $a_1x_1+a_2x_2\ldots+a_nx_n=b$, $(a_1;a_2;\ldots;a_n)=1$ diofantoszi egyenletnek létezik megoldása és az összes megoldás leírható $n-1$ paraméter segítségével.

Bizonyítás: A változók száma szerinti teljes indukcióval.

Egy példa: Oldjuk meg a $12x+10y+15z=1$ diofantoszi egyenletet.

A megoldás a következők szerint történhet: $(12,10)=2$, így ha az eredeti egyenlőség fennáll, akkor teljesül a $12x+10y+15z\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ kongruencia is. Innen $15z\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$

adódik, vagyis $z \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, azaz $z = 2t+1$, $t \in \mathbb{Z}$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe: $6x+5y = -15t-7$. Gondolatmenetünket újrakezdve, ha ez fennáll, akkor teljesül a $6x+5y \equiv -15t-7 (\mathrm{mod}\ 6)$ kongruencia is, vagyis $5y \equiv -15t-7 (\mathrm{mod}\ 6)$, azaz $y \equiv -15t-7 (\mathrm{mod}\ 6)$, vagyis $y \equiv 3t+1 (\mathrm{mod}\ 6)$. Azaz olyan $y = 3t+1+6s$, ahol $s \in \mathbb{Z}$. Ezt és $y = 2t+1$-t az eredeti egyenletbe visszaírva megkaphatjuk x-et az s és t paraméterek segítségével.