Elemi matematika 3. - MTN424g

A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség n tagra

1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nemnegatív, akkor $G(a_1; a_2; \ldots; a_n) \leq A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$, azaz

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

és egyenlőség pontosan akkor (akkor és csak akkor) áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ötlet. Nézzünk utána Riesz Frigyes bizonyításának, illetve a Cauchy-féle „fáradtságos" visszalépéses teljes indukciós bizonyításnak.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pozitív, akkor

$$A_n - G_n \geq \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n})^2}{n}.$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc.$$

Ötlet. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget külön-külön az a, b, c és a ab, bc, ca hármasokra.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Ötlet. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az a^2, a^2, b^2 típusú hármasokra.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + b^2a + c^2b.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség? Általánosítsunk!

Ötlet. Használjuk az előző két feladat eredményét.

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az $a^2, \sqrt{bc}$ típusú tagokra, majd használjuk az előző feladat eredményét.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Általánosítsunk!

Ötlet. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az a^4, a^4, a^4, b^4 típusú négyesekre.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq abc(ab + bc + ca).$$

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^3b^2c + ab^3c^2 + a^2bc^3.$$

13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y pozitív, akkor

$$x^5y + xy^5 \geq x^4y^2 + x^2y^4.$$

Általánosítsunk!

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^2 + ab + b^2 + bc + c^2 + ca \geq 6 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Általánosítsunk!

15. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d pozitív, akkor

$$ab^2c^3d^4 \leq \left(\frac{a + 2b + 3c + 4d}{10}\right)^{10}.$$

Általánosítsunk!

16. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d pozitív és $abcd = 1$, akkor

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

17. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc.$$

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív, akkor

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$$

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív és $abc = 1$, akkor

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geq 27.$$

Ötlet. $a + 2b = a + b + b$.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d nemnegatív, akkor

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd.$$

Általánosítsunk!

22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

23. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$c^2(a + b) + a^2(b + c) + b^2(c + a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

24. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 3(a^3+b^3+c^3).$$

25. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 3(a^3+b^3+c^3).$$

26. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az $a_1; a_2; \ldots; a_{2017}$ nemnegatív valós számok átlaga 1, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}} + \frac{a_2}{a_2^{2018}+a_3+a_4+\ldots+a_{2017}+a_1} + \ldots +$$

$$+\frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018}+a_1+a_2+\ldots+a_{2016}} \leq 1.$$

Segítség: igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}} \leq \frac{1}{2017}.$$

27. Feladat. Melyik nagyobb, 1997^{1999} vagy 1999^{1997}?

Ötlet. $1997 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+\ldots+1.$

28. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

Általánosítsunk!

29. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > \sqrt[4]{3 \cdot 2^7}.$$

Általánosítsunk!

30. Feladat. Melyik nagyobb, 1997^{1999} vagy 1999^{1997}?

31. Feladat. Igazoljuk, hogy $n > 2$ egész szám esetén

$$(3n+1)^3 > 8 \cdot \sqrt[n]{(3n)!}.$$

Általánosítsunk!

32. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész szám, akkor

$$2n < 4^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{2}{n}} + \ldots + 4^{\frac{n}{n}}.$$

Élesíthető-e a fenti becslés?

Ötlet. Gondoljunk az $f(x) = 4^x$ függvény $[0;1]$-n vett felső integrálközelítő összegére.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$ egész szám, akkor

$$n \cdot \sqrt[n]{n+1} - n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ötlet. Átrendezés után adjunk hozzá n darab 1-est majd készítsünk a már meglévő tagokból és az egyesekből ügyesen páronkénti összegeket.

34. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész szám, akkor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq n - \frac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

35. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

36. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor
$$(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n.$$

37. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor
$$(n!)^3 < \left(\frac{(n+1)^2 n}{4}\right)^n.$$

38. Feladat. Igazoljuk, hogy az $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ sorozatra $a_n < 4$, ha $n \in \mathbb{N}^+$.

Ötlet. $(1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n}) + \ldots + (1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$-re végezzünk becslést.

39. Feladat. Igazoljuk, hogy az $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ sorozat szigorú monoton nő.

Ötlet. $(1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n}), \ldots, (1+\frac{1}{n}), 1$-re végezzünk becslést.

40. Feladat*. Oldjuk meg a
$$2x^3 = x^4 + \frac{27}{16}$$
egyenletet.

Ötlet. $x = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3}$.

41. Feladat. Oldjuk meg a
$$\sqrt{3^x} + \sqrt[4]{3^{x^2+3x-2}} + \sqrt[8]{3^{x^2+2x-8}} = 1$$
egyenletet.

42. Feladat. Oldjuk meg a
$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$$
egyenletet.

Ötlet. $\operatorname{tg}^2 x = a; \operatorname{tg}^2 y = b$.

43. Feladat. Oldjuk meg az
$$x^4 - 7 = y^4 - 7 = z^4 + 5 = t^4 + 9 = xyzt$$
egyenletrendszert.

Ötlet. Mind a három kifejezést tegyük egyenlővé az utolsóval.

44. Feladat*. Oldjuk meg az
$$x^{\ln\frac{y}{z}} + y^{\ln\frac{z}{x}} + z^{\ln\frac{x}{y}} = 3$$
egyenletet.

45. Feladat. Milyen értékeket vehet fel az $x+y+z$ összeg, ha $x^4 + 4y^4 + 16z^4 + 64 = 32xyz$?

46. Feladat*. Igazoljuk, hogy az
$$\sin x(1-\cos x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

47. Feladat. Legyen az x, y pozitív számokra

$$f(x;y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2}.$$

Határozzuk meg $f(x;y)$ minimumát!

48. Feladat. Határozzuk meg $f(x) = (1-x)^3(1+3x)$ függvény maximumát $\left]-\frac{1}{3};1\right[$-n!

49. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények minimumát, és minimumhelyét!
(a) $f(x) = \frac{x^6+4}{x^4}$,
(b) $g(x) = \frac{x^6+4}{x^2}$,
(c) $h(x) = \frac{x^6+4}{x}$.

Ötlet. $\frac{x^6+4}{x^4} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x^4}$.

50. Feladat*. Legyen $0 < x < 1$. Határozzuk meg $f(x) = x - x^3$ maximumát.

A súlyozott számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség
Ha x_i pozitív $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, q_i > 0$ akkor

$$x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n} \leq q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n.$$

51. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai, akkor

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a \cdot \left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b \cdot \left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1.$$

52. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^ab^bc^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

53. Feladat. Igazoljuk, hogy ha m, n, x pozitív, akkor

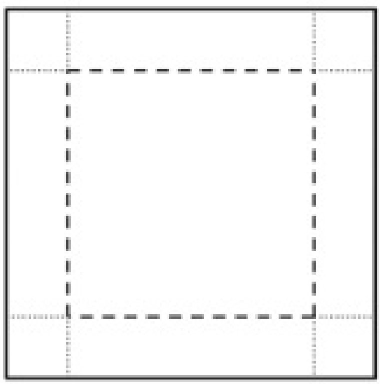
$$mx^n + nx^{-m} \geq m + n.$$

Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok

54. Feladat. Adott kerületű háromszögek közül melyik területe maximális?

Ötlet. Használjuk a Héron-formulát.

55. Feladat. Egy gyárban a gyártási folyamat során egy a oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez minden sarkából eltávolítanak egy-egy, egymással egybevágó négyzet alakú részt, az ábra szerint. Ezek után a szaggatott vonalak mentén a lapokat felhajtják, s élük mentén összeforrasztják őket, így egy felül nyitott, téglatest alakú dobozt képezve. Mekkora az a értéke, ha az ezen eljárással készíthető maximális térfogatú doboz térfogata $1024\ \text{cm}^3$?



56. Feladat. Adott térfogatú, felül nyitott hengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne? És ha nem nyitott felül?

57. Feladat. Adott felszínű, felül nyitott téglatest alakú dobozok közül melyiknek térfogata maximális?

58. Feladat. Egy üzemben 4000 cm^3 térfogatú felül nyitott, négyzetes alapú egyenes hasáb alakú edényeket gyártanak. Melyiknek minimális a felszíne?

«Emelt szintű érettségi feladat 2012. október 7. feladat»

59. Feladat. Egy egyenes körhenger tengelymetszetének kerülete 6 m. Mekkorák a maximális térfogatúnak a méretei?

60. Feladat. Írjunk adott gömbbe maximális térfogatú hengert.