Elemi matematika 1. - MTN224g

Oszthatósági feladatok

1. Számjegyek összege, különbsége

1. Feladat. Hány olyan természetes szám van, amelyből elvéve a számjegyei összegét 2018-at kapunk?

Ötlet. Használjuk fel, hogy egy természetes szám kilences maradéka megegyezik a számjegyei összegének kilences maradékával. Bizonyítsuk, általánosítsuk ezt az állítást.

2. Feladat. Egy számhoz a számjegyei összegét adva 1989-et kaptunk. Melyik ez a szám?

3. Feladat. Keressük meg mindazokat az x, y, z természetes számokat, melyekre teljesül, hogy x számjegyeinek összege y, y számjegyeinek összege z, és $x + y + z = 2018$.

4. Feladat. Keressük meg az összes olyan prímszámot amely az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza.

5. Feladat. Gondolj egy pozitív egész számra. Szorozd meg 18-cal, adj hozzá 63-at, majd töröld az eredmény bármely, 0-tól különböző számjegyét. A megmaradó számból megmondom a hiányzó számjegyet. Hogyan csinálom?

6. Feladat. Írjuk fel a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával a

(a) 100-at,
(b) 99-et

úgy, hogy a számjegyekből képezhetünk kétjegyű számokat (háromjegyűeket már nem érdemes), és csak az $+$ műveletet használhatjuk.

« Abacus 2008/5. »

7. Feladat. Egy számot a számjegyei összegével megszorozva 20102010-et kaptunk. Melyik ez a szám?

8. Feladat. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számjegyek két különböző sorrendjével képezzünk két 7-jegyű számot úgy, hogy egyik a másik kétszerese legyen.

9. Feladat. Legyen A és B hétjegyű, az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket pontosan egyszer tartalmazó szám. Igazoljuk, hogy $A \nmid B$.

Megoldás. Mindkét szám 9-es maradéka ugyanaz nevezetesen 1. Ha $A = nB$ lenne, akkor $B = 9N + 1$ feltétellel $A = 9Nn + n$, ami azt jelenti, hogy n 9-es maradéka 1. A legkisebb ilyen a 10, de ez nem lehet, mert mindkét szám hétjegyű.

10. Feladat. Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000.$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1998. 9. osztály 1. feladat »

11. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha a $\overline{2x3}$ számhoz 326-ot adva a 9-cel osztható $\overline{5y9}$ számot kapjuk.

12. Feladat. Hány olyan 11-gyel osztható szám van, amely mind a tíz számjegyet pontosan egyszer tartalmazza?

13. Feladat. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 12. osztály 4. feladat »

14. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromjegyű számot kétszer egymás után írva 11-gyel osztható hatjegyű számot kapunk.
(b) Milyen számot írhatunk még a 11 helyére, hogy a fenti oszthatóság továbbra is fennálljon?
(c) Gondolj egy háromjegyű szánra, majd vedd a fenti szám kétszeri felírásával kapott hatjegyű számot. Oszd el a számot 11-gyel, a hányadost 7-tel, a hányadost 13-mal. Mit tapasztalsz? Miért?

« Kalmár László Matematikaverseny, megyei forduló, 1993. 6. osztály »

15. Feladat. Lehet-e három egész élhosszúságú kocka térfogatának az összege 2002 egység?

Ötlet. Vizsgáljuk a kilences maradékot.

« KöMaL C. 690. »

2. További oszthatósági feladatok

16. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha $\overline{987x6}$ osztható

(a) 3-mal,
(b) 4-gyel,
(c) 5-tel,
(d) 6-tal,
(e) 7-tel,
(f) 8-cal,
(g) 9-cel,
(h) 11-gyel,
(i) 12-vel,
(j) 24-gyel,
(k) 36-tal,
(l) 72-vel.

17. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha

(a) $18|\overline{3438x}$
(b) $36|\overline{35x1y}$
(c) $36|\overline{351xx}$
(d) $45|\overline{15x67y}$
(e) $56|\overline{1xy358}$
(f) $72|\overline{x554y}$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $18|\overline{3438x}$, akkor

(a) $4|\overline{3438x}$
(b) $20|\overline{3438x}$
(c) $191|\overline{3438x}$

19. Feladat. Alkossunk a fentiekhez hasonló oszthatósági feladatokat úgy, hogy azoknak

(a) egy,
(b) páratlan sok,
(c) bármely számjegyekből álló számpár

megoldása legyen.

20. Feladat. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1990. 2. forduló 3. feladat 7. osztályosok versenye »

21. Feladat. Igazoljuk, hogy $2017^{2016} + 8$ nem prím.

Ötlet. $a^3 + b^3$

22. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $9|10^{2018}-1$
(b) $9|10^{2018}+224$
(c) $6|10^{2018}+224$
(d) $18|10^{2018}+224$
(e) $36|10^{2018}+224$
(f) $72|10^{2018}+224$.

23. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) $5|1^1+11^{11}+111^{111}+\ldots+11..1^{11..1}$ (Az összeg 2010 tagú.)
(b) $10|11^{2018}-1$
(c) $2018|2019^{2019}+2017^{2017}$
(d) $13|2^{70}+3^{70}$.

24. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $3|n^3-n$
(b) $6|n^3-n$
(c) $5|n^5-n$
(d) $30|n^5-n$
(e) $7|n^7-n$
(f) $11|n^{11}-n$

(g) Vessük össze a fenteiket a következővel: Ha p prím és a egész, akkor $p|a^p-a$. Ez az ún. kis Fermat-tétel. Más alakja: Ha p prím és a egész, valamint $(p;a)=1$, akkor $p|a^{p-1}-1$. Így különböző, a feltételeknek eleget tevő a számokra $(1<a<n, (a;n)=1)$ letesztelhetjük, hogy n átmegy-e az $n|a^{n-1}-1$ teszten. Ha nem, akkor biztos, hogy nem prím, ha igen, lehet, hogy prím. Bár egy összetett szám, csak $\frac{1}{2}$ valószínűséggel csúszik át a teszten egy véletlen a-ra, vannak számok, melyek minden alkalmas a-ra átmennek a teszten, mégsem prímek, ezek a Carmichael-számok. A legkisebb ilyen az 561.

25. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$5040|n^7-14n^5+49n^3-36n.$$

26. Feladat. Anna meghatározta a legkisebb olyan pozitív n számot, melyre $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ osztható 1000-rel. Mennyi n számjegyeinek az összege?

«Bolyai János Matematika Csapatverseny, körzeti forduló, 10. osztály 3. feladat alapján, 2022.»

27. Feladat*. Bizonyítsuk be, hogy

$$82!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{82}\right)$$

osztható 1992-vel.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 10. osztály 4. feladat »

28. Feladat. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözők és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege n. Bizonyítsuk be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n-nel.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1993. 9. osztály 1. feladat »

29. Feladat. Határozzuk meg azokat a csupa különböző számjegyből álló ötjegyű számokat, melyekre teljesül, hogy fordítottjuk is ötjegyű és mindketten oszthatók 275-tel.

30. Feladat. Határozzuk meg az n természetes szám értékét, ha $\frac{n+17}{n-3}$ is természetes.

Megoldás. Mivel $\frac{n+20-3}{n-3}=1+\frac{20}{n-3}$, így $n=4,5,8,13,23$.

« Zrínyi Ilona Matematikaverseny, döntő, 1992. 8. osztály »

31. Feladat. Határozzuk meg az n természetes szám értékét, ha $\frac{134n+2010}{134n-2010}$ is természetes.

32. Feladat. Igazoljuk, hogy egyetlen n pozitív egész szám esetén sem egyszerűsíthető:

(a) $\frac{3n+5}{7n+12}$,
(b) $\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$,
(c) $\frac{n!-1}{(n+1)!-1}$,
(d) $\frac{7^n-2}{7^{n+1}-5}$.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$$

tört nem egyszerűsíthető!

Megoldás. Bontsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is!

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16} = \frac{(n^2+1)(n^2+3)}{(n^2+2)(n^2+8)}$$

Mivel pedig n^2+2 relatív prím mind n^2+1-hez, mind n^2+3-hoz, azért a tört csak akkor lesz egyszerűsíthető, hogyha n^2+8-nak van közös valódi osztója a számláló valamelyik tényezőjével. Ha van ilyen, akkor ez osztója a különbségnek is, tehát vagy $n^2+8-(n^2+1)=7$ lehet, vagy pedig $n^2+8-(n^2+3)=5$ (hiszen mindkét szám prím). Minden lehetséges esetre megvizsgálva n^2+1 7-es maradékát azt kapjuk, hogy n^2+1 soha nem lesz 7-tel osztható, és hasonló módon kapjuk azt is, hogy n^2+3 soha nem lesz 5-tel osztható. Így tehát a lehetséges közös osztók biztosan nem lépnek föl, ami azt jelenti, hogy a tört valóban nem egyszerűsíthető.

« VII. NMMV, Szabadka, 1998. ápr. 23-26., 10. osztály, 2. feladat »

34. Feladat. Igazoljuk, hogy $35|3^{6n}-2^{6n} (n\in\mathbb{N}^+)$.

Ötlet. $27^{2n}-8^{2n}$-ből kiemelhető az alapok összege.

35. Feladat. Igazoljuk, hogy $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$.

36. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számra igaz, hogy a $(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\dots\cdot(k+2000)$ szorzat osztható 2000^{99}-nel!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2000. 9. osztály 1. feladat »

37. Feladat. Bizonyítsa be, hogy 9^n-8n-1 osztható 64-gyel, ahol n nemnegatív egész szám.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2004. 11. osztály 1. feladat »

38. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész, akkor 4^n+6n-1 osztható 9-cel. Általánosítsunk!

39. Feladat. Igazoljuk, hogy ha k páratlan, akkor $1+2+\ldots+n|1^k+2^k+\ldots+n^k$.

40. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha $n\geq 3$ egész szám, akkor

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)-1$$

osztható 2^n-nel!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2000. 11. osztály 4. feladat »

41. Feladat*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996\,|\,2557^{2n+1}+1559^{2n+1}-4054^{2n+1}-62^{2n+1}$$

Megoldás. Tekintve, hogy $1996 = 4 \cdot 499$, a megoldáshoz elegendő, hogy az

$$A = 2557^{2n+1} + 1559^{2n+1} - 4054^{2n+1} - 62^{2n+1}$$

szám osztható külön-külön 4-gyel és 499-cel (a két szám relatív prím). Felhasználjuk a megoldás során, hogy az ismert azonosságok szerint

$$(a+b)|(a^{2n+1} + b^{2n+1})$$

és

$$(a-b)|(a^{2n+1} - b^{2n+1})$$

Mivel $2557 + 1559 = 4 \cdot 1029$, illetve $4054 + 62 = 4 \cdot 1029$, azért az

$$A = (2557^{2n+1} + 1559^{2n+1}) - (4054^{2n+1} + 62^{2n+1})$$

felírásban a kisebbítendő és a kivonandó is osztható 4-gyel, tehát $4|A$ is teljesülni fog. Mivel pedig $2557 - 62 = 5 \cdot 499$, továbbá $4054 - 1559 = 5 \cdot 499$, azért az

$$A = (2557^{2n+1} - 62^{2n+1}) - (4054^{2n+1} - 1559^{2n+1})$$

felírásban a kisebbítendő és a kivonandó is osztható 499-cel, tehát $499|A$ is teljesülni fog. A két állítás pedig együtt azt jelenti, hogy bebizonyítottuk a kért összefüggést.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1996. 10. osztály 1. feladat »

42. Feladat. Igazoljuk, hogy $n + 4 \nmid n^2 + 8n + 15$.

Ötlet. $(n+4)(n+3), (n+4)(n+4)$

43. Feladat. Igazoljuk, hogy ha

(a) $11|3a + 4b$, akkor $11|a + 5b$,
(b) $19|a - 5b$, akkor $19|10a + 7b$,
(c) $17|a - 5b$, akkor $17|2a + 7b$,
(d) $17|5a + 2b$, akkor $17|9a + 7b$,
(e) $16|12a - 7b$, akkor $16|4a + 23b$,
(f) $13|2a + b$ és $13|5a - 4b$ akkor $13|a - 6b$,
(g) $7|10a + b$, akkor $7|10b + 2a$,
(h) $7|10b + 2a$, akkor $7|10a + b$,
(i) $7|10a + b$, akkor $7|a - 2b$,
(j) $7|a - 2b$, akkor $7|10a + b$,
(k) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a héttel való oszthatóságra.)
(l) $7|100a + b$, akkor $7|a + 4b$,
(m) $7|a + 4b$, akkor $7|100a + b$,
(n) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a héttel való oszthatóságra.)
(o) $13|10a + b$, akkor $13|a + 4b$,
(p) $13|a + 4b$, akkor $13|10a + b$,
(q) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a tizenhárommal való oszthatóságra.)
(r) $17|10a + b$, akkor $17|a - 5b$,
(s) $17|a - 5b$, akkor $17|10a + b$,
(t) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a tizenhéttel való oszthatóságra.)
(u) $a + c|ab + cd$, akkor $a + c|ad + bc$,
(v) $a - c|ab + cd$, akkor $a - c|ad + bc$,

Ötlet. $3(a + 5b) = 3a + 4b + 11b$.

44. Feladat. Peti így okoskodik: a 728 osztható 7-tel, mert a 7 és a 28 is osztható 7-tel. Igaza van-e? Azaz igaz-e, hogy ha az $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0}$ számra teljesül, hogy bárhogy is daraboljuk számunkat az elejéről kezdve, ha a kapott darabok oszthatók 7-tel, akkor a számunk is? Igaz-e a fentiek megfordítása?

45. Feladat. Van-e olyan természetes szám, amelynek az értéke megötszöröződik, ha az első számjegyét az elejéről töröljük, és a végére írjuk?

46. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy a fenti eljárással egy szám csak a háromszorosára nőhet (tehát kétszeresére, négyszeresére, hatszorosára, hétszeresére, nyolcszorosára, kilencszeresére sem).

(b) Keressük meg az összes, a fenti eljárással háromszorosára növő természetes számot.

Megoldás. Tegyük fel, hogy van ilyen, legalább kétjegyű természetes szám. Ennek ötszöröse a 0 vagy 5 számjegyre végződik, mint minden 5-tel osztható számé. Ez az utolsó jegy az eredeti szám első jegye volt, ezért ez a 0 nem, csak az 5 lehetett. Ha azonban egy szám első jegye az 5, úgy ötszöröse az eredetinél több jegyű, és ez ellentmond feltevésünknek. Meg kell még vizsgáljuk az egyjegyű természetes számokat. Ezek közül a 0 hiányzik, hiszen az n-jegyű szám első jegye megállapodás szerint legalább egy, a többi egyjegyű pedig nem ötszöröse önmagának. Nincs tehát olyan természetes szám, amelynek értéke megötszöröződne a feladatbeli eljárással. Másképp is okoskodhatunk: a keresett szám ugyanannyi jegyű, mint ötszöröse, így a szám első jegye csak az 1 lehet. Ha ezt a szám végére helyezzük, úgy 5-tel osztható számot nem nyerhetünk, hiszen az ilyen utolsó jegye a 0 vagy az 5. Ugyanígy igazolhatjuk, hogy nincs olyan természetes szám sem, amelyik 6-szor, illetve 8-szor akkora lesz, ha első jegyét a szám végére helyezzük! Azt is megmutathatjuk, hogy nincs olyan természetes szám sem, amely a 2-szeresére, 4-szeresére vagy 9-szeresére nőne, ha az első számjegyét a szám végére helyezzük. Eme állítások közül kettőt bebizonyítunk különböző módokon. Ha egy szám a 4-szeresére nö az első jegyének a szám végére helyezésével, akkor ennek első jegye csak az 1 vagy a 2 lehet. Az első jegynek a szám végére helyezésével páros számot kaptunk, így az első jegy nem lehet más, mint a 2. Jelölje keresett számunkat a $\overline{2ab\dots st}$. A feltételünk szerint $4\cdot\overline{2ab\dots st}=\overline{ab\dots st2}$. A t csak a 3 vagy 8 lehet, különben a bal oldali, 4-gyel szorzás nem adhat 2-es számjegyet. A $t=8$-ra a jobb oldali szám viszont nem lehet 4-nek többszöröse, mivel 82 nem osztható 4-gyel. Ha viszont $t=3$, akkor $4\cdot\overline{2ab\dots s3}=\overline{ab\dots s32}$, csak úgy lehet, ha $s=3$ vagy $s=8$. Az $s=8$-ra a bal oldali szám csak 4-gyel, a jobb oldali viszont 8-cal is osztható, mivel 832 többszöröse a 8-nak. Ha pedig $s=3$, úgy $4\cdot\overline{2ab\dots 33}=\overline{ab\dots 332}$. Mindkét oldalból 12-t levonva a $4\cdot\overline{2ab\dots 30}=\overline{ab\dots 320}$, most 10-zel osztva a $4\cdot\overline{2ab\dots 3}=\overline{ab\dots 32}$ adódik. Ezek szerint a $\overline{2ab\dots st}$ szám ugyanolyan tulajdonságú, mint a $\overline{2ab\dots s}$, ha tehát tovább számolunk, azt nyerjük, hogy számunkban csak 3-as számjegy szerepelhet, ami ellentmond feltételünknek, hiszem számunk a 2-es számjeggyel kezdődik. Nincs tehát ilyen, négyszeresére változtatható szám. Ha egy szám első jegyének a szám végére helyezésével a szám 7-szeresére nö, akkor a szám első jegye az 1-es. Ha most x jelöli az első számjegy elhagyásával nyert számot, úgy ha az eredeti szám m jegyű volt, akkor az x jegyeinek a száma $m-1$ és $7\cdot(1\cdot 10m+x)=10x+1$ azaz rendezéssel ebből $x=7\cdot 10m-13$. Az x azonban nem lehet $(m-1)$ jegyű, hiszen $7\cdot 10m-13>10m$. A fentiekben bemutatott eljárásokkal azt is igazolhatjuk, hogy a legkisebb olyan természetes számok, melyek háromszorozódnak, ha első jegyüket a szám végére tesszük, a 142857 illetve a 285714. Azt is igazolhatjuk, hogy minden háromszorozódó csakis az 142857 vagy a 285714 hat számjegyből álló számjegycsoport k-szori ismétlésével ($k=1,2,3,\dots$) leírt szám lehet.

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1988. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

47. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot melyre $n+1|n^2+1$

48. Feladat. Határozzuk meg azokat az n pozitív egész számokat, melyekre $n-3|n^3-3$.

49. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n egész, akkor $\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$ is egész.

50. Feladat. Igazoljuk, hogy ha tizenhárom egész szám összege osztható 6-tal, akkor a tizenhárom szám tizenharmadik hatványának összege is osztható 6-tal. Általánosítsunk!

Ötlet. $a_1^{13}-a_1+a_2^{13}-a_2+...+a_{13}^{13}-a_{13}+a_1+a_2+\ldots+a_{13}=a_1(a_1^{12}-1)+a_2(a_2^{12}-1)+\ldots+a_{13}(a_{13}^{12}-1)+6N$, $a(a^{12}-1)=a(a^6-1)(a^6+1)=\ldots$

« KöMaL C. 629. »

51. Feladat. A 2018-at felbontottuk néhány egész szám összegére. Milyen maradékot ad 6-tal osztva a számok köbeinek összege?

Ötlet. Tekintsük az előző feladatot.

« KöMaL Gy. 3071. alapján »

52. Feladat. Igazoljuk, hogy három, öttel nem osztható szomszédos szám szorzatának valamelyik szomszédja öttel osztható.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1978., 9.osztály, 5. feladat »

53. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c különböző számjegyek, akkor

$$\overline{aabb} \nmid \overline{abcacb}.$$

54. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írva 13-mal osztható hatjegyű számot kapunk.
(b) Milyen számot írhatunk még a 13 helyére, hogy a fenti oszthatóság továbbra is fennálljon?
(c) Gondolj egy kétjegyű szánra, majd vedd a fenti szám háromszori felírásával kapott hatjegyű számot. Oszd el a számot 3-mal, a hányadost 7-tel, a hányadost 13-mal. majd a hányadost 37-tel. Mit tapasztalsz? Miért?
(d) A fenti két feladat alapján találjunk ki mi is hasonló feladatokat.

55. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $37|\overline{abc}$, akkor $37|\overline{bca}$ illetve, $37|\overline{cab}$.

« »

56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $27|\overline{abc}$, akkor $27|\overline{bca}$ illetve, $27|\overline{cab}$.

« »

57. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $37|\overline{abcabc}$, akkor $37|\overline{bcabca}$ illetve, $37|\overline{cabcab}$.

« Kalmár László Matematikaverseny, megyei forduló, 1996. 8. osztály »

58. Feladat. Van-e olyan háromjegyű szám, amely egyenlő számjegyei szorzatának ötszörösével?

59. Feladat. Keressük meg azokat az ötjegyű számokat melyek számjegyeik szorzatának 45-szörösei.

60. Feladat.

(a) Tekintsünk két háromjegyű számot melyek különbsége osztható 7-tel. Igazoljuk, hogy ezen két szám egymás után írásával keletkező hatjegyű szám osztható 7-tel.

(b) Milyen számokat írhatunk a 7 helyére, hogy a feladat állítása továbbra is érvényben maradjon?

61. Feladat. Béla ismer egy oszthatósági szabályt a hatjegyű számok 37-tel való oszthatóságára. Szerinte egy hatjegyű szám akkor osztható 37-tel, ha az első három jegyéből álló háromjegyű számhoz hozzáadva az utolsó három számjegyéből képzett számot harminchéttel osztható számot kapunk. Igaza van-e Bélának?

« Kalmár László Matematikaverseny, döntő, 1994. 6. osztály, megyei forduló, 1995. 7. osztály »

62. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1997^{1999} + 1999^{1997}$ osztható 3996-tal.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 10. osztály 1. feladat és KöMaL C. 1676 »

63. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a és b egymást követő páratlan pozitív számok, akkor $a^b + b^a$ osztható $a + b$-vel.

«KöMaL C. 1676»

64. Feladat. Osztható-e $20^{2008} + 16^{2008} - 3^{2008} - 1$ 323-al? Az állításodat igazold!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az adott szám osztható 323-al. A bizonyítást két részben végezzük el. A 323 felbontható két prímszám, a 17 és a 19 szorzatára. Ha bebizonyítjuk, hogy a kifejezés mindkét számmal osztható, akkor megoldottuk a feladatot. Sőt ennél többet is: a 2008 helyett bármely páros hatványra is be tudjuk látni az oszthatóságot.

Első lépésben nézzük meg a 17-el való oszthatóságot.

Ehhez csoportosítsuk át a tagokat így: $\left(20^{2k} - 3^{2k}\right) + \left(16^{2k} - 1\right)$. Ekkor ismert azonosság alapján mindkét zárójelből ki tudjuk emelni a 17-et. Az első zárójelből kiemelhető a $20-3 = 17$, a másikból pedig a $16^2 - 1 = (16-1)\cdot(16+1)$. Ezzel a 17-el való oszthatóságot beláttuk.

Most ismét átcsoportosítjuk a tagokat a 19 kiemeléséhez: $\left(20^{2k} - 1\right) + \left(16^{2k} - 3^{2k}\right)$. Az előbbiek szerint az első tagból kiemelhető $20 - 1 = 19$, a másodikból pedig a $16 + 3 = 19$. Ezzel a 19-el való oszthatóságot beláttuk.

« NMMV 2008. 10/1 »

65. Feladat. Add meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1993-at megszorozva olyan többszörösét kapod, amelynek 1994 az utolsó négy jegye!

Megoldás. A keresett szám a 4858. Ugyanis az 1993 valamely többszörösének utolsó jegye csak akkor lehet a 4, ha az 1993 szorzójának az utolsó jegye 8. Az $1993 \cdot 8$ szorzat utolsó két jegyéből adódó kétjegyű szám a 44. Ehhez 5 darab tízest kell adni, hogy a keresett többszörös 94-re végződjék, ám a 3-nak csak az 5-szöröse ad öt egyest, tehát az 1993 keresett szorzójának utolsó két jegyét már ismerjük: 58. Az $1993 \cdot 58 = 1000A + 594$, vagyis most 4 százast kell kapjunk a keresett szorzó százasának és az 1993 egyesének szorzatából. Ezt csak úgy érhetjük el, ha az említett százasok száma 8. Az $1993 \cdot 858 = 10000 \cdot B + 9994$, és így a keresett szorzó ezresének és a 3-nak a szorzatából két darab ezrest kell kapjunk, amit csak akkor nyerhetünk, ha az ezresek száma 4. Valóban: $1993 \cdot 4858 = 9681994$ és eljárásunkból adódik, hogy a 4858 a legkisebb ilyen tulajdonságú pozitív egész.

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1993. 3. forduló 2. feladat 7. osztályosok versenye »

66. Feladat. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 11. osztály 1. feladat »

67. Feladat. Peti gondolt egy pozitív egész számra és huszonhárom állítást fogalmazott meg a számmal kapcsolatban, melyek közül kettő szomszédos nem igaz, de a többi igaz.
1. Osztható 2-vel.
2. Osztható 3-mal.
3. Osztható 4-gyel.
$\vdots$
23. Osztható 24-gyel.

Peti a lehető legkisebb ilyen számra gondolt. Melyik ez a szám?

«KöMaL K. 690.»

3. Osztók száma

68. Feladat. Állítsuk elő a 2^n-t néhány egymást követő pozitív egész összegeként.

69. Feladat. Hányféleképp áll elő a 2010 néhány egymást követő pozitív egész összegeként?

« Kalmár László Matematikaverseny alapján »

70. Feladat. Határozzuk meg n-et, ha $n^3 + n^2 - 30n$-nek pontosan 8 osztója van.

71. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1, 2, \ldots, 2n$ számok közül $n+1$-et választva lesz a kiválasztott számok között kettő, melyek relatív prímek.

72. Feladat. Adjuk meg a legkisebb olyan pozitív egész számot amelynek

(a) 1,	(d) 4,	(g) 8,	(j) 20,
(b) 2,	(e) 5,	(h) 10,	(k) 24,
(c) 3,	(f) 6,	(i) 12,	(l) 100.

pozitív osztója van.

73. Feladat. Az n pozitív egész számnak 1996 pozitív osztója van. Igazoljuk, hogy n nem osztható 1995-tel.

Ötlet. $1996 = 2^2 \cdot 499$

« Gerőcs: Repeta matek »

74. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 4 pozitív egész osztója van, és ezen osztóinak összege 108.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2001. 9. osztály 5. feladat »

75. Feladat*. Egy 61×61-es sakktábla négyzeteire elhelyezzük a pozitív egész számokat a bal felső sarokból indulva és a tábla sorainak megfelelően haladva 1-től 61^2-ig. Ezután első lépésben minden beírt szám előjelét negatívra változtatjuk. Második lépésben minden páros szám előjelét megváltoztatjuk, harmadik lépésben minden 3-mal osztható szám előjelét, és így tovább, amíg a lépés lehetséges. Mindezt elvégezve a táblán hány olyan 1×2-es téglalap lesz, amelyben a számok összege negatív?

«KöMaL C. 1660.»

4. Négyzetszámok

76. Feladat. Igazold, hogy 7 darab különböző természetes szám négyzete között van két olyan, amelynek a különbsége 10-zel osztható.

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1989. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

77. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1, 11, 111, \ldots$ sorozatban pontosan egy négyzetszám van.

78. Feladat. Hány négyzetszám van a $14, 144, 1444 \ldots$ sorozatban?

79. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy négyzetszám utolsó számjegye 6, akkor az utolsó előtti páratlan.

« Varga Tamás Matematikaverseny, döntő, 1994/95., 7. osztály »

80. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy négyzetszám utolsó előtti számjegye páratlan, akkor utolsó számjegye 6.

« Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, I. forduló, kezdők, 1995/96. »

81. Feladat. Igazoljuk, hogy négy szomszédos természetes szám szorzatához egyet adva, mindig négyzetszámot kapunk.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1975., 9.osztály, 5. feladat »

82. Feladat. $1156 = 34^2, 111556 = 334^2, 11115556 = 3334^2, 1111155556 = 33334^2, \ldots$ fogalmazzuk meg általános észrevételünket és bizonyítsuk is be.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1976., 12.osztály, 5. feladat, Kalmár Verseny 5. osztály »

83. Feladat. Tudjuk, hogy a, b, c olyan pozitív egészek, melyekre $a^2 + b^2 = c^2$. Igazoljuk, hogy ekkor

(a) $5|abc$
(b) $6|ab$
(c) $12|ab$.

84. Feladat. János és Ottó testvérek és eladták az összes CD lemezüket Andrásnak. Minden lemezért annyiszor 100 Ft-ot kaptak, mint ahány lemezük volt. András a vételárat 1000 Ft-osokban fizette ki, ameddig csak tudta, és csak a maradékot adta fémpénzben. Mivel a testvérek az 1000 Ft-osokat nem tudták egymás közt egyenlően felosztani, János eggyel többet kapott, míg Ottó kapta a fémpénzeket. János felváltott egy ezrest, s még odaadott néhány fémpénzt Ottónak, s így ugyanannyi pénzük lett. Hány forintot kapott Ottó Jánostól?

« Zrínyi Ilona Matematikaverseny, döntő, 1998. 6. osztály »

85. Feladat. Határozzuk meg az összes $n^2 + 6n$ alakú négyzetszámot.

Ötlet. $n^2 < n^2 + 6n < (n + 3)^2$

« Szőkefalvi, 2009. »

86. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1997x^2 + 1998x + 1995$ semmilyen x egész szám esetén sem lesz teljes négyzet!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1997. 9. osztály 1. feladat »

87. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n páratlan, akkor $n^3 + 1$ nem négyzetszám.

« Szőkefalvi, 2009. »

88. Feladat. Igazoljuk, hogy $1991^{1991} + 1992^{1992} + ... + 1996^{1996}$ nem négyzetszám.

« KöMaL F. 3107. »

89. Feladat. Igazoljuk, hogy $n^{2k} + 1$ nem végződhet egynél több 0-ra.

90. Feladat.

(a) Adott 10 pozitív egész, melyek egyikének sincs 20-nál nagyobb prím osztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább egy, legfeljebb az összes) úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám.
(b) Adott 11 pozitív egész, melyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prím osztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább egy, legfeljebb az összes) úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám.

91. Feladat. Adott 48 pozitív egész szám, melyek szorzatának 10 különböző prím osztója van. Mutassuk meg, hogy van a számok között négy olyan, melyek szorzata négyzetszám.

92. Feladat. Legfeljebb hány különböző négyzetszám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 11-gyel?

93. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege

(a) 2010
(b) 2018

Ötlet. Vizsgáljuk a hármas, kilences maradékot.

94. Feladat. Igazoljuk, hogy öt szomszédos természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

95. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $3^{2000} + 4$ szám pozitív osztóinak száma összetett szám!

Ötlet. Lássuk be, hogy $3^{2000} + 4$ összetett, majd azt hogy nem négyzetszám.
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2003. 10. osztály 3. feladat »

96. Feladat. Vannak-e olyan 3-nál nagyobb p, r prímszámok, amelyekre $2p^2 + 7r^2 + 2021$ számjegyeinek összege négyzetszám?

«KöMaL B. 5166.»

97. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy 2003 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(b) Igazoljuk, hogy 2005 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(c) Igazoljuk, hogy 2007 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(d) Igazoljuk, hogy 10^k+3 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám, ahol $k \in \mathbb{Z}_0^+$.
(e) Igazoljuk, hogy $n \cdot 10^k + 3$ páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám, ahol $k > 2, \quad 1 \leq n \leq 9, \quad n, k, \in \mathbb{N}^+$.

Ötlet. Vizsgáljuk a nyolcas maradékot.

98. Feladat. Adott egy pozitív egészekből álló négyelemű halmaz, melyre teljesül, hogy bármely két elemének szorzatához 13-at adva négyzetszámot kapunk. Igazoljuk, hogy a halmaz minden eleme néggyel nem osztható páros szám.

«KöMaL B. 4898.»

99. Feladat. Keressük meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyzetszámot!

100. Feladat. Legfeljebb mekkora lehet a 2^n fokos szög szinusza, ha n pozitív egész?

Megoldás. A megoldás során a fok jelölést elhagyjuk. $\sin(2^n) = \sin(2^n - 360k)$, ha k egész szám, és alkalmas k-val $0 \leq 2^n - 360k < 360$. A $[0, 360)$ intervallumon belül a $[0, 180]$-ban a $\sin x$ értéke nemnegatív, és itt annál nagyobb, minél közelebb van x a 90-hez. Így n és k azon értékeit keressük, amelyekre $0 \leq 2^n - 360k < 360$ és $2^n - 360k$ a lehető legközelebb esik a 90-hez; azaz $0 \leq 2^{n-3} - 45k < 45$, és $2^{n-3} - 45k$ eltérése a $90/8 = 11,25$-től minimális. A $2, 22, 23, \ldots, 212, 213$ maradéka a 45-tel osztva rendre: $2, 4, 8, 16, 32, 19, 38, 31, 17, 34, 23, 1, 2$. Innentől a maradékok periodikusan ismétlődnek, ezért a $11,25$-hoz legközelebb eső maradék a 8. Így $2^n - 3 = 23$ esetén $n = 6$, azaz $\sin(2^n)$ legnagyobb értéke $\sin 64^o \approx 0,8988$.

« KöMaL B. 3477. »

5. LNKO, LKKT

101. Feladat. Adjunk meg

(a) három,
(b) k

pozitív egész számot melyek legnagyobb közös osztója egy, de közülük semelyik kettő sem relatív prím.

102. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a és b relatív prímek, akkor

(a) $(a; a + b) = 1$,
(b) $(a; b^2) = 1$,
(c) $(b^2; a + b) = 1$,
(d) $(a^2; a - b^2) = 1$.

Ötlet. A megoldások indirekt módon elvégezhetők. A feltevés, hogy a vizsgált két számnak van valami közös p prímtényezője ellentmondásra vezet.

(a) Ha $(a; a + b) = p$, akkor $p|a$ és $p|a + b$ maga után vonja, hogy $p|(a + b) - a = b$, azaz a és b mégsem relatív prímek.

« Sárga »

103. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén $(2^n + 1, 2^n - 1) = 1$.

« Sárga »

104. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén $(2^n + 1, 4^n + 1) = 1$.

« Sárga »

105. Feladat. Igazoljuk, hogy $(a; b) = (a; a - b)$.

Megoldás. Legyen $d|a$ és $d|b$. Ekkor $d|a - b$ is fennáll. Vagyis a és b minden közös osztója közös osztója a-nak és $a - b$-nek is, így a legnagyobb közös osztójuk is megegyezik.

106. Feladat. Melyik ismert eljárás helyessége következik a fentiekből?

107. Feladat. Mely a pozitív egész számokra áll fenn, hogy

(a) $(a; 8) = 80$,
(b) $(a; 60) = 15$,
(c) $[a; 16] = 48$,

(d) $(a;120) = [a;24]$,

108. Feladat. Igazoljuk, hogy pozitív számokra $(a;b)\,[a;b] = ab$

Megoldás. Legyen $(a;b) = d$. Ekkor $a = kd, b = md, (k;m) = 1$. Legyen g az a és b egy közös többszöröse. Ekkor alkalmas pozitív egészekkel $g = at, g = bv$. Ekkor $b|g$, azaz $md|at$, azaz $md|at$, azaz $md|kdt$, azaz $m|kt$. De mivel $(k;m) = 1$, ezért $m|t$. Ekkor alkalmas r egésszel $t = mr$. Így $g = at = amr = kdmr$. Így g minden többszöröse, ezáltal a, b minden közös többszöröse többszöröse kdm-nek (mivel ez is a, b közös többszöröse), így kdm az a és b legkisebb közös többszöröse. De $[a;b] = kdm = \frac{ab}{(a;b)}$.

109. Feladat. Mely n, k pozitív egészre teljesül, hogy

(a) $(n;k) = 13$ és $[n;k] = 2002$,
(b) $(n;k) = 26$ és $[n;k] = 4784$,
(c) $(n;k) = 13$ és $[n;k] = 2018$,
(d) $(n;k) = p$ és $[n;k] = pq^2$, (p, q prímek),
(e) $n + k = 13$ és $[n;k] = 720$,
(f) $n + k = 1323$ és $[n;k] = 147$,
(g) $(n;k) = 7$ és $n + k = 100$
(h) $a + b = 36(a;b)$ és $[a;b] = 3850$,
(i) $a + b = 370$, és $[a;b] = 270(a;b)$,
(j) $a + b = 667$, és $\frac{[a;b]}{(a;b)} = 120$.

« Sárga »

110. Feladat. Keressünk olyan pozitív egész számokat melyekre $[a;b] = a + b$.

Ötlet. Legyen $(a;b) = d$. Ekkor $a = dn, b = dm, (m;n) = 1$. Ekkor $[a;b] = \frac{ab}{(a;b)}$ alapján $dn + dm = \frac{dmdn}{d}$.

111. Feladat. Oldjuk meg az $[a;b] + (a;b) = a + b + p$ egyenletet, ahol a, b pozitív egész, p pedig prím.

Megoldás. Legyen $(a;b) = d$. Ekkor egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $d = 1$ vagy $d = p$. Ha $d = p$, akkor az $[a;b] = a + b$ egyenletet kapjuk, amelynek az előző feladat alapján nincs megoldása. Ha $d = 1$, akkor felhasználva, hogy $[a;b](a;b) = ab$, $(a-1)(b-1) = p$ adódik. Innen $a = 2, b = 3, p = 2$, vagy $a = 3, b = 2, p = 2$. « Sárga »

112. Feladat. Mely k, l, m természetes számokra áll fenn, hogy $[k;l;m] = 60984, 88k = 9l$, és $11m = 2k$?

« Sárga »

113. Feladat. Tudjuk, hogy $(a;b) = 5$. Milyen értékeket vehet fel
(a) $(a + b; a - b)$
(b) $(a + 2b; 4a - b)$?

114. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^2$.

Ötlet. A 2003 prím.

115. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számokat, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^2$.

116. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ rögzített.

117. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[p;n] \leq (p;n)^2$, ahol p rögzített prím.

118. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[p;n] \leq (p;n)^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ és p prím rögzített.

119. Feladat. 49 természetes szám összege 999, határozzuk meg legnagyobb közös osztójuk legnagyobb értékét.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1985., 12.osztály, 5. feladat »

120. Feladat. Adottak az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

Ötlet. Skatulya-elv.

« NMMV 1998. 11/3 »