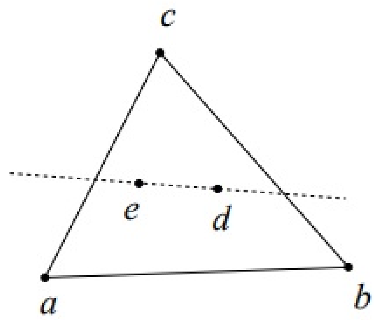
Elemi matematika 4. - MTN621g

Kombinatorikus geometria

1. Feladat. Happy End probléma: Igazoljuk, hogy ha adott a síkon 5 általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen) akkor kiválasztható közülük négy úgy, hogy azok egy konvex négyszög csúcsi legyenek. A megoldás során adjunk meg 5 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 kiválasztása jó legyen, és adjunk meg 5 pontot úgy is, hogy csak egyféleképp lehessen négy pontot kiválasztani a feladat feltételeinek megfelelően. (Általánosítás: Sejtés: $2^{m-2}+1$ általános helyzetű pont közül mindig kiválaszthatók egy konvex m-szög csúcsai.)

Megoldás.

- Ha az öt pont konvex burka ötszög, akkor bármely négy pont megfelelő.
- Ha az öt pont konvex burka négyszög, akkor az a négy pont jó.
- Ha az öt pont konvex burka háromszög, akkor a következő ábra alapján választunk pontokat.



2. Feladat. Miért az előző feladat az első ebben a témakörben?

Megoldás. A történet 1932 őszére nyúlik vissza. Pesti egyetemisták egy kis köre - köztük Erdős Pál, Grünwald (később Gallai) Tibor, Klein Eszter, Szekeres György és Turán Pál - ekkoriban, főként hétvégeken rendszeresen összegyűlt a Városligetben. Az Anonymus-szobornál találkoztak, irodalomról, zenéről, politikáról beszélgettek, múltról és jövőről, álmaikról és csalódásaikról. És még valamiről, ami szenvedélyesen foglalkoztatta őket: a matematikáról. Tulajdonképp már ismeretségüket is a matematikának köszönhették. Gimnazistaként mindannyian a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok lelkes feladatmegoldói voltak. Fényképen már korábban látták egymást a legeredményesebb diákok arcképcsarnokában, melyet a lap évenként megjelentetett. Az egyetem padjaiban és a Városliget hatalmas platánjai alatt ezek a kapcsolatok aztán életre szóló barátsággá érlelődtek. Egyik találkozójukra Klein Eszter egy érdekes kis feladattal érkezett. Észrevette, hogy akárhogy veszünk fel öt pontot a síkban úgy, hogy nincs három egy egyenesen, mindig kiválasztható közülük egy konvex négyszög négy csúcsa. Erdős a feladatot Happy End problémának keresztelte el. Néhány évvel később ugyanis Klein Eszter és Szekeres György összeházasodtak, és 2005-ben 93, illetve 94 évesen fél óra különbséggel hunytak el egy ausztráliai szanatóriumban.

3. Feladat. Adott a síkon 5 általános helyzetű (semelyik három nincs egy egyenesen) pont. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük 3, melyek egy tompaszögű háromszög csúcsai.

Ötlet. Vizsgáljuk a konvex burkot.

4. Feladat. Adott a síkon 100 pont, melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 20 konvex négyszög úgy, hogy a 80 csúcspont az adott pontok közül való és a négyszögek páronként diszjunktak (közös pont nélküliek)!

Ötlet. Először megmutatjuk, hogy kiválasztható 20 diszjunkt pontötös. Az adott 100 pont véges sok egyenest határoz meg, így van olyan egyenes, amely ezek egyikével sem párhuzamos. Ha ezt az egyenest egy rá merőleges irány mentén mozgatjuk,...

5. Feladat. Általánosítsuk az előző állítást.

Megoldás. Tekintsük a következő feladatot.

6. Feladat. Adott a síkon $n \geq 5$ általános helyzetű pont. Igazoljuk, hogy legalább $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ olyan konvex négyszög van, melynek csúcsai a fenti pontok közül valók.

7. Feladat. Egy konvex $ABCD$ négyszög minden oldalának hossza kisebb, mint 24 egység. Legyen P a négyszög valamely belső pontja. Igazoljuk, hogy a négyszögnek van olyan csúcsa, amelynek P-től vett távolsága kisebb, mint 17 egység.

Ötlet. Próbálkozzunk indirekt módon.

8. Feladat. Hány általános helyzetű egyenest vettünk fel a síkon, ha összesen

(a) 3 (b) 10 (c) 91

metszéspontjuk van? Egyeneseket általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos (vagy esik egybe), illetve semelyik három nem megy át egy ponton.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott a síkon 2000 pont, akkor van olyan egyenes, amely mindkét oldalán pontosan 1000 pont van (az egyenesre tehát egyetlen pont sem illeszkedik a fentiek közül). Általánosítsunk.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott a síkon végtelen sok pont, akkor köztük szükségképpen végtelen sok távolság lép fel.

Ötlet. Indirekt.

11. Feladat. Adott a síkon 2018 pont. Igazoljuk, hogy van olyan kör, amelynek belsejében 1009 pont van.

Ötlet. Meghúzzuk az összes szakaszfelező merőleges egyenest, majd P legyen olyan, amely ezek egyikén sincs rajta.

12. Feladat. Általánosítsuk az előző állítást.

13. Feladat. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy van a négyzetrácson olyan körlemez, amely pontosan n darab rácspontot fed le!

Ötlet. Tekintsünk egy olyan $C(a; b)$ középpontú kört, ahol a és b irracionális számok. Ezen a körvonalon egynél több rácspont nem lehet, ugyanis ...

14. Feladat. Adott a síkon 1000 pont. Igazoljuk, hogy a sík bármely egységsugarú körén van olyan M pont, hogy M-nek az adott pontoktól vett távolságainak összege legalább 1000.

Ötlet. Tekintsük az egységsugarú kör AB átmérőjét. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt a P_i pontokra $AP_i + BP_i > 2$.

15. Feladat. Egy R sugarú asztalra r sugarú érméket teszünk, melyek nem fedik egymást. Már letettünk n érmét, s többnek már nincs hely. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{\frac{R}{r}-1}{2}\right)^2 < n < \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Megoldás. A felső becslés kijön abból, hogy az érmék összterülete kisebb mint az asztal területe. Az alsó becslés meg abból, hogy a kétszeresére növelt sugarú érmék összterülete nagyobb mint egy $R-r$ sugarú asztalé.

16. Feladat. Adott a síkon n darab pont, amelyek között nincs három, amely egy egyenesre esne, és nincs négy, amely egy körön lenne. Minden ponthármas köré kört írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma legföljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

17. Feladat. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú sokszög oldalegyenesei?

Megoldás.

$$p(n) = n + p(n-1) = n + (n-1) + \ldots + 4 + p(3) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Ezt pedig $n = 1999$ esetére kiszámolva azt kapjuk, hogy $p(1999) = 1999001$.

18. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy t területű és k kerületű konvex sokszögben el lehet helyezni egy $\frac{t}{k}$ sugarú kört.

Ötlet. Írjunk minden oldalra befelé olyan téglalapokat, amelyeknek a sokszöggel nem közös oldala t/k hosszúságú.

19. Feladat. Adott a síkon n általános helyzetű pont úgy, hogy bármely három által kifeszített háromszög területe legfeljebb 1. Igazoljuk, hogy a pontok lefedhetők egy olyan háromszöggel melynek területe 4.

Ötlet. Tekintsük (az egyik) legnagyobb területű háromszöget.

20. Feladat. Egységnyi oldalú négyzetbe néhány kört írtunk, melyek kerületének összege legalább 10. Igazoljuk, van olyan egyenes, amelyik legalább 4 kört metsz. Igazoljuk, hogy ezek között olyan egyenes is található, amely a négyzet valamely oldalával párhuzamos.

Ötlet. Dolgozzunk a kerületek összegével, vetítsük azokat a négyzet oldalaira.

21. Feladat. A síkon felveszünk néhány egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy bármely két szomszédos tartomány különböző színű legyen. (Két tartomány szomszédos, ha van közös határoló szakaszuk, félegyenesük vagy egyenesük.)

Ötlet. A feladatot az egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

22. Feladat. Az e és f párhuzamos egyeneseken kijelöltünk n illetve k $(n, k, \geq 2)$ pontot. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a kijelöltek közül valók?

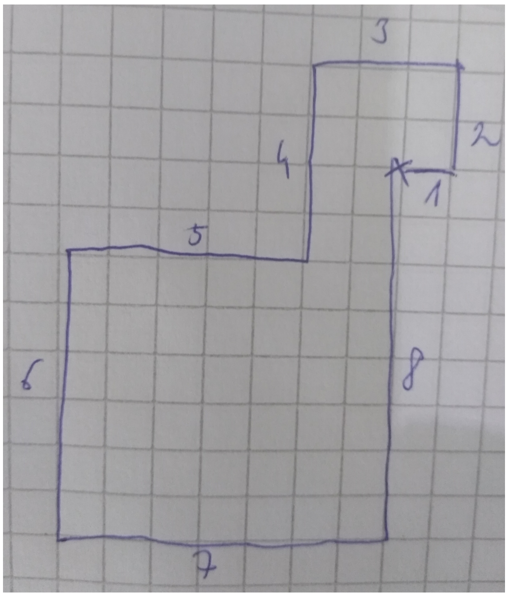
23. Feladat. Milyen n-re létezik a síkon olyan n szakaszból álló zárt töröttvonal, amelyben bármely két szomszédos szakasz merőleges egymásra, és a szakaszok hossza rendre $1, 2, \ldots n$?

Megoldás.

- Helyezzük el az egészet egy koordináta-rendszerben, úgy, hogy az első szakasz az origóból indul (vízszintesen).
- Világos, hogy n páros, mert a vízszintes és függőleges szakaszok felváltva követik egymást, azaz a továbbiakban $n = 2k$.
- Ekkor a páratlanadik, vízszintes szakaszok hosszának összege páros, mert ugyanannyit megyünk balra, mint jobbra. Vagyis $1+3+\ldots+(2k-1) = \dfrac{1+2k-1}{2} \cdot k = k^2$ páros, vagyis n néggyel is osztható.

- Hasonlóan látható, hogy a függőleges szakaszok hosszának összege is páros kell, hogy legyen, sőt mivel minden függőleges szakasz páros, ezért mivel fölfele ugyanannyit megyünk mint lefele, a függőleges szakaszok hosszának összege 4-gyel is osztható, kell, hogy legyen. Így $2+4\ldots+2k = \frac{2+2k}{2}\cdot k = (k+1)k$ összeg 4-gyel osztható, ami, mivel k páros, csak akkor teljesül, ka k néggyel is osztható, vagyis n 8-cal osztható. Ez a feltétel elegendő is, erre mutat példát a következő konstrukció:

$$(1-3-5-+7)+(9-11-13+15)+\ldots=0$$
$$(2-4-6+8)+(10-12-14+16)+\ldots=0$$



24. Feladat. Egy 7×7-es négyzetrács minden kis négyzetét kiszíneztük két szín valamelyikével. Igazoljuk, hogy van legalább 21 olyan téglalap, melynek oldalai párhuzamosak a rácsegyeneseinkkel, és amelynek csúcsai azonos színű kis négyzetek középpontjai.

25. Feladat. A négyzetrácson a rácsegyenesekkel párhuzamosan elhelyezkedő módon felvettünk egy 1997×1998-as téglalapot, melynek csúcsai is rácspontok. Hány egységnégyzetet vág át az átlója?

26. Feladat. Hány olyan háromszög van, amelynek oldalai n-nél nagyobb, de $2n$-nél nem nagyobb egész számok? Ezek közül a háromszögek közül hány egyenlőszárú és hány egyenlőoldalú van?

« NMMV 1992.10.2.»

27. Feladat. Lefedhető-e a sík véges sok sávval? (Egy sávot két párhuzamos egyenes határol.)

Ötlet. Tekintsünk egy olyan egyenest a síkon, amely egyik olyan egyenessel sem párhuzamos, amely valamely sávot határolja.