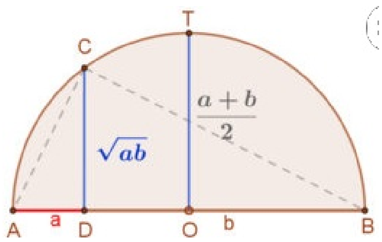
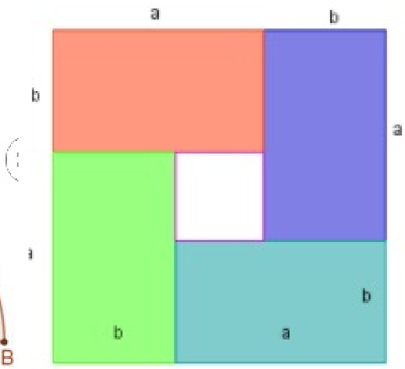
Elemi matematika 3. - MTN424g

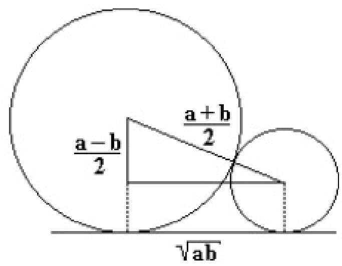
A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség két tagra

1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív, akkor $G(a;b) \leq A(a;b)$, azaz $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, és egyenlőség pontosan akkor (akkor és csak akkor) áll fenn, ha $a = b$.

Ötlet. Gondoljunk a magasságtételre, a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételére, valamint az $(a+b)^2$ azonosság használatára, vagy alkalmazzuk ügyesen a Pitagorasz-tételt.







2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$. Mikor áll fenn egyenlőség? Hogyan általánosítható az egyenlőtlenség?

Ötlet. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget külön-külön az $(a;b)$, illetve a $(b;c)$ és $(c;a)$ tagokra.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$. Mikor áll fenn egyenlőség? Adjunk több megoldást, általánosítsunk.

Ötlet. Éljünk pl. az $ab = C$ jellegű helyettesítéssel mindhárom változóra.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. Mikor áll fenn egyenlőség? Általánosítsunk!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Ötlet. $a+b-c = C$.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai, s a félkerülete, akkor

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc.$$

Ötlet. $x = s-a$.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$. Általánosítsunk!

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d nemnegatív, akkor

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6 \cdot \sqrt[4]{abcd}.$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d nemnegatív és $abcd = 1$, akkor

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c.$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + b \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Általánosítsunk!

Ötlet. Vigyünk be a gyök alá, és vegyük észre, hogy „mértani közép" keletkezett.

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív és $a+b+c = 1$, akkor $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} < 2$.

Ötlet. $a = a \cdot 1$.

13. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív és $ab = 1$ és $a > b$, akkor

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2 \cdot \sqrt{2}.$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív, akkor

$$\frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{4}(a + b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,.$$

15. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z nemnegatív és $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$, akkor

$$\frac{x^2}{x + y} + \frac{y^2}{y + z} + \frac{z^2}{z + x} \geq \frac{1}{2}.$$

Ötlet. $x^2 = x^2 + xy - xy$.

16. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Általánosítsunk!

17. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b + a)(b + c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. $\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{b+c}}\,.$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{x - y + z}{\sqrt{xz}} + \frac{x + y - z}{\sqrt{xy}} + \frac{-x + y + z}{\sqrt{yz}} \leq 3.$$

Ötlet. $a + b = x, \ldots$.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, és $a + b + c = 1$, akkor

$$\sqrt{2a + 1} + \sqrt{2b + 1} + \sqrt{2c + 1} < 4.$$

Ötlet. $a + 1 = \frac{2a+2}{2} = \frac{(2a+1)+1}{2}\,.$

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i pozitív $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2a_i + 1} < n + 1.$$

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, és

(a) $a+b+c=1$, akkor $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$,
(b) $a+b+c=1$, akkor $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<6$,
(c) $a+b+c=2$, akkor $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<9$.

22. Feladat. Legyen x_i nemnegatív ($i=1,2,\ldots,n$), és $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Határozzuk meg $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$ maximumát.

Ötlet. Legyen a páros indexű tagok összege X, a páratlanoké Y.

23. Feladat. Bontsuk fel a 18-at két tag összegére úgy, hogy a tagok szorzata a legnagyobb legyen.

24. Feladat. Tudjuk, hogy az a,b nemnegatív számokra $a+b=42$. Mikor lesz a^2+b^2 minimális?

25. Feladat. Oldjuk meg a

$$4^{x^2}+16^{x^2}=2\cdot 7^{x^2}$$

egyenletet.

26. Feladat. Oldjuk meg a

$$2^{2^{x+2}}+2^{2^{-x}}=8$$

egyenletet.

27. Feladat. Oldjuk meg a

$$(4^x+9^x)(9^x+25^x)(25^x+4^x)=8\cdot 900^x$$

egyenletet.

28. Feladat*. Oldjuk meg a

$$(\sin^4 x+1)(\cos^4 x+1)=\frac{25}{16}\sin^4 2x$$

egyenletet.

29. Feladat. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$$

egyenletet.

Ötlet. $A=A\cdot 1$.

30. Feladat*. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{array}{r} x^2-4\cdot\sqrt{3x-2}+6=y \\ \underline{y^2-4\cdot\sqrt{3y-2}+6=x} \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert.

Ötlet. $x\le x^2-3x+4$.

31. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha x pozitív, akkor

$$\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\le\left(\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{3}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right).$$

Ötlet. $\sqrt{6x+9}\le\sqrt{6x+9}+\frac{1}{18}\left(\sqrt{6x+9}-9\right)^2$, és $\sqrt{16x+64}\le\sqrt{16x+64}+\frac{1}{32}\left(\sqrt{16x+64}-16\right)^2$.

32. Feladat*. Legyen az a, b, c pozitív számokra, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Keressük

$$S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

minimumát.

Ötlet. S helyett dolgozzunk S^2-tel, valamint éljünk az $A = \frac{1}{2}(A + A)$ trükkel.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n pozitív természetes szám, akkor

$$2 \cdot \sqrt{n+1} - 2 \cdot \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 \cdot \sqrt{n} - 2 \cdot \sqrt{n-1}.$$

34. Feladat. Igazoljuk, a fentiek segítségével, hogy

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

35. Feladat*. Határozzuk meg

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x}$$

minimumát.

Ötlet. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x) = \sqrt{2} \sin{(x + \frac{\pi}{4})}$.

36. Feladat. Határozzuk meg

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}$$

minimumát.

37. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x > 1$, akkor

$$\log_x(x+1) > \log_{x+1}(x+2).$$

38. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{9x^2 + 4}{x}$$

függvény minimumát a pozitív számok halmazán.

39. Feladat. Határozzuk meg az

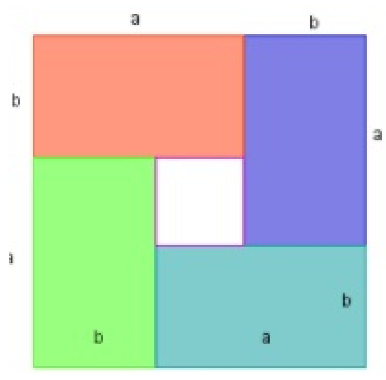
$$f(x) = \frac{a + bx^4}{x^2}$$

függvény minimumát ahol a, b nemnegatív valós paraméter.

Feladatok „$x + \frac{1}{x}$”-típusú egyenlőtlenségekre

40. Feladat. Milyen határok közé esik $x + \frac{1}{x}$, ha x pozitív? És ha negatív?

Ötlet. Használjuk a



ábrát, illetve egy másik lehetőség, a Pitagorasz-tétel felírása egy olyan derékszögű háromszögre, amely befogói $2, x - \frac{1}{x}$ hosszúságúak.

41. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

42. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\log_\pi 2} + \frac{1}{\log_2 \pi} > 2.$$

43. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a > 1$, akkor

$$a^{\frac{x^2}{4}} + a^{\frac{4}{x^2}} \geq 2a.$$

44. Feladat. Oldjuk meg

$$9^x + 9^{\frac{1}{x}} = 18.$$

45. Feladat. Oldjuk meg a

$$2\cos y = x + \frac{1}{x}$$

egyenletet.

46. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

47. Feladat. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma + \sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta} \geq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. Térjünk át oldalak arányára a szinusztétel segítségével.

48. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Ez az ún. Nesbitt-egyenlőtlenség.)

Ötlet. $x = b + c \ldots$.

49. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

maximumát a pozitív számok halmazán.

50. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós szám esetén

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2.$$

Ötlet. Legyen $a^2 + 1 = b^2$.

51. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós szám esetén

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok

52. Feladat. 200 méter hosszú kerítéssel szeretnénk egy épület fala mentén három oldalról körbekeríteni egy téglalap alakú részt. Mekkorának válasszuk az oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?

53. Feladat. Határozzuk meg adott kerületű téglalapok közül a maximális területűt, illetve adott területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

54. Feladat. Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

55. Feladat. Adott felszínű téglatestek közül melyik testátlója minimális?

56. Feladat. Egy téglatest egyik lapjának területe 1 dm^2, az élek hosszának összege 20 dm. Mekkora ezen téglatestek felszínének maximuma?

57. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a = \sqrt{bc}$, akkor $\alpha \leq 60°$.

Ötlet. Írjuk fel a koszinusztételt.

58. Feladat. Egy háromszögbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van. Igazoljuk, hogy a négyzet területe legfeljebb a háromszög területének fele.

59. Feladat. Mekkorák a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

60. Feladat. Egy háromszög egyik oldala 1, másik két oldala hosszának összege állandó. Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt köre területe szorzatának legnagyobb értékét!

Ötlet. $t = rs, t = \frac{abc}{4R}$.

61. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha a, b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogójának a hossza, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab(a + b + c)} \geq \sqrt{2}.$$

62. Feladat. Egy trapéz egyik alapja 12 cm, a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm. Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

63. Feladat. Egy körcikk területe 16. Mekkora a sugara, ha kerülete minimális?

Ötlet. $t = \frac{r^2\alpha}{2}$.

64. Feladat. Adott kerületű negyed-körgyűrűcikkek közül melyiknek a területe maximális?