Elemi matematika 1. - MTN224g

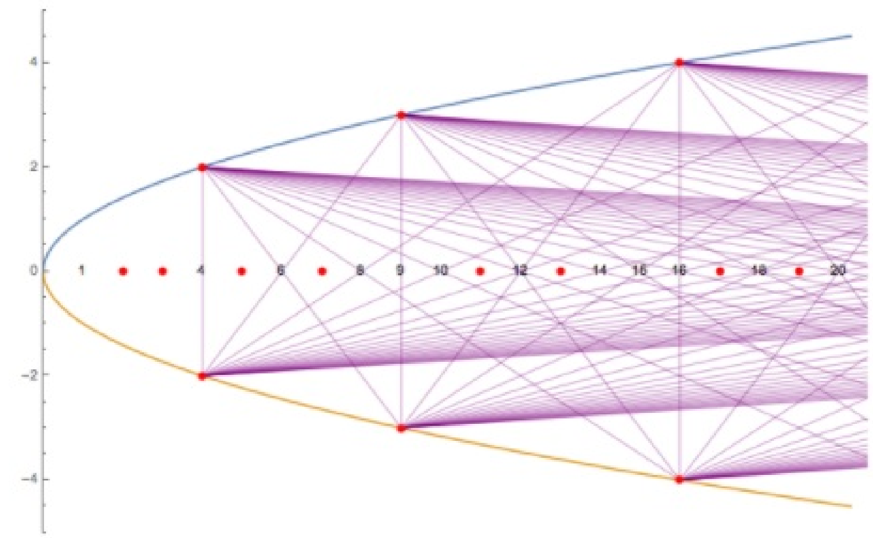
PRÍMEK

1. Bevezető feladatok

Megjegyzés. A pozitív egész számok halmazában a $p, (p > 1)$ prím, ha rendelkezik a prím tulajdonsággal, azaz ha $p|ab$-ből következik, hogy $p|a$ vagy $p|b$. A pozitív egész számok halmazában a $q, (q > 1)$ felbonthatatlan (irreducibilis), ha $q = ab$-ből következik, hogy $q = a$ vagy $q = b$. Az egész számok gyűrűjében a prímeket a hagyományos értelemben felbonthatatlanként kezeljük, és ezt meg is tehetjük mert a prímek és a felbonthatatlanok euklideszi gyűrűben egybeesnek, de ez általában nem igaz. Az igaz, hogy ha egy I integritástartományban a szorzásnak nincs egységeleme akkor nincsenek I-ben prímek, és az is, hogy ha egy I integritástartományban a szorzásnak van egységeleme, akkor a prímek szükségképpen felbonthatatlanok is. Gauss-gyűrűkben már az is igaz, hogy az felbonthatatlanok prímek.

1. Feladat. Hogyan segít az *Eratosztheneszi-szita* a prímek „kiszitálásában”?

2. Feladat. Milyen más módszereket ismerünk prímek „szitálásra”? Tekintsük például a `https://demonstrations.wolfram.com/AParabolaSieveForPrimeNumbers/` demonstrációt. Hogyan működik?



Megoldás. Az $y^2 = x$ parabolára minden 1-nél nagyobb i, j pozitív egészre összekötünk minden $(i^2, -i)$ pontot minden $(j^2, -j)$ ponttal. Ezen összekötő egyenesek az x tengelyt a $(ij; 0)$ pontban metszik. (Miért?) Így az x tengely 1-nél nagyobb pozitív egész pontjait tekintve minden összetett számot metszünk legalább egy ilyen egyenessel. A szabadon maradt, egyenessel nem metszett értékek a prímek.

3. Feladat. Három prímszám összege 2018. Lehet-e a szorzatuk 2031887?

4. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs két olyan szomszédos prímszám, melyek között pontosan 2018 összetett szám lenne. Általánosítsunk!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy a prímszámok sorozatában tetszőleges nagy hézag lehet, azaz, hogy tetszőleges n természetes szám esetén megadható n egymást követő összetett szám.

Ötlet. Vizsgáljuk az $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots (n + 1)! + (n + 1)$ sorozat tagjait.

6. Feladat. Lehet-e 2021 egymást követő pozitív egész szám összege prímszám? Általánosítsunk!

7. Feladat. Lehet-e $4k$ darab egymást követő egész szám összege prím?

8. Feladat. Írjuk le az $1, 2, 3, \ldots, 40$ számokat olyan sorrendben, hogy bármely két szomszédos tag összege prím legyen.

Ötlet. A 41 és a 43 prím.

9. Feladat. Van-e olyan háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit összeszorozva tízet kapunk?

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1990. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

10. Feladat. Keressük meg azokat a négyzetszámokat, amelyeket 11-gyel maradékosan osztva a hányados prímszám és a maradék 4.

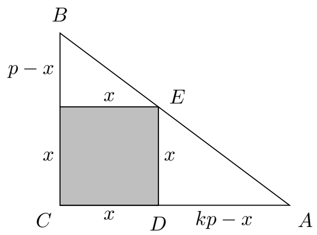
11. Feladat. Legyen p_n az n-edik prímszám, és $N = p_n + p_{n+1}$ $(n > 1)$. Bizonyítsuk be, hogy N legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata.

Ötlet. Vizsgáljuk a paritást, dolgozzunk a számtani középpel.
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1993. 11. osztály 1. feladat »

12. Feladat. Az a összetett szám legkisebb valódi osztója nagyobb $\sqrt[3]{a}$-nál. Igazoljuk, hogy a két prímszám szorzata.

13. Feladat. Az ABC, C-ben derékszögű háromszögben $BC = p$, ahol p prímszám, az AC befogó hosszának számértéke a $k \cdot p$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, továbbá egész szám annak a négyzetnek az oldalhossza is, amelynek egyik csúcsa a C pont, a többi csúcsa az ABC háromszög oldalain van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet területe k^2-tel egyenlő!

Megoldás. Jelöljük a négyzet oldalhosszát x-szel, ekkor $FB = p - x$ és $AD = kp - x$.



A BFE és EDA háromszögek a szögek egyenlősége miatt hasonlók, ami azt jelenti, hogy $\frac{p-x}{x} = \frac{x}{kp-x}$, ebből pedig átszorzás és rendezés után az következik, hogy $x(k+1) = kp$. Tudjuk azonban, hogy a k és a $k+1$ relatív prímek, azért $k+1$ szükségképpen osztója a jobb oldalon a p számnak is. Ez pedig csak azt hagyja lehetőségként, hogy $k + 1 = p$, továbbá $x = k$, és így a négyzet területe $x^2 = k^2$.
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2002. 9. osztály 4. feladat »

2. Egyenletek prímekre

14. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^q + 1 = r$ egyenletet.

Ötlet. Vizsgáljuk a paritást, majd a hármas maradékot.

15. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^2 - 2q^2 = 1$ egyenletet.

Megoldás. Átrendezve $2q^2 = (p-1)(p+1)$ adódik. A $p = 2$ eset nem ad megoldást, p páratlan, ekkor viszont q csak páros lehet, mert a jobb oldali szorzat osztható 4-gyel. Ez az eset megoldást is ad, a $p^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$ egyenletből $p = 3, q = 2$.

16. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a következő egyenletet:

$$p + p^2 + p^3 + q + q^2 + q^3 = 2393.$$

17. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a

(a) $2p + 3q + 6r = 78$,
(b) $2p + 7q + 14r = 252$ egyenletet.

Általánosítsunk!

18. Feladat. Három prím szorzata az összegük

(a) ötszöröse,
(b) tizenkétszerese,
(c) tizenháromszorosa,
(d) n-szerese.

Határozzuk meg ezeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1985., 9.osztály, 2. feladat »

19. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán: $8^p + p^2 = q$.

Megoldás. Világos, hogy p páratlan. A $p = 3$ jó, mivel az 521 prím. Ha $p > 3$ és prím, akkor a 8^p a 8 egy páratlan kitevős hatványa, ami hárommal osztva 2 maradékot ad, míg a p^2 egy hárommal nem osztható szám négyzete, ami hárommal osztva 1 maradékot ad. Ezek alapján a baloldal hárommal osztható (és nagyobb, mint három), tehát nem lehet prím.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy nincsenek olyan különböző prímek, melyek reciprokai (legalább 3 tagú) számtani sorozatot alkotnak.

Ötlet. Az $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{q}$ alakot vizsgálva, az $(2p - q)(2r - q) = q^2$ egyenlethez jutva bontsunk esetekre.

21. Feladat. Milyen p és q prímszámokra teljesül a $3(p^2 - q) = q^2 - p$ egyenlet?

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet: $(3p + 1)p = q(q + 3)$. Mivel p és q prímek, azért $3p + 1$-nek q-val, $q + 3$-nak p-vel kell oszthatónak lennie. Ebből látható, hogy a két prím nem lehet egyenlő. Ha az egyik esetben a hányados k, a másikban l, akkor az egyenlet $kqp = qlp$, amiből $k = l$ szükségképpen következik. Ekkor a két oszthatóság $3p + 1 = kq$ és $q + 3 = kp$ alakba írható, amit megoldva $(k^2 - 3)p = 3k + 1$ adódik. $k > 4$-re a bal oldal első tényezője már nagyobb lesz a jobb oldalnál, ezért elegendő a $k \leq 4$ esetet vizsgálni. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy csak $k = 2$ esetén lesz a p valóban prímszám. Ebben az esetben $p = 7$ és $q = 11$ adódik, ami könnyen ellenőrizhető módon tényleg megoldás lesz.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 9. osztály 1. feladat »

22. Feladat. Oldjuk meg a pozitív prímszámok halmazán a következő egyenletet: $3x^2 + 6x = 2y^2 + 7y$.

Megoldás. Az oszthatóság könnyebb vizsgálata érdekében célszerű átrendezni az egyenletet:

$$3x(x+2) = y(2y+7)$$

Mivel x és y prímszámok, ez azt jelenti, hogy $x|y$ (ekkor $x = y$), vagy $x|2y+7$. Az első esetben nincs értelmes megoldás, az $x(x-1) = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A második esetben az is igaz lesz, hogy $3x|2y+7$, mert $3x$ osztja a bal oldalt, és relatív prím y-hoz ($y = 3$ könnyen láthatóan nem ad megoldást). Ekkor

$$3x \leq 2y+7$$

Továbbá igaz az, hogy $y|(x+2)$ (mivel $3x$-hez relatív prím). Így az iménti egyenlőtlenségbe behelyettesítve és tovább becsülve

$$3x \leq 2y+7 \leq 2x+11$$

-et kapjuk, tehát $x \leq 11$ a megoldás szükséges feltétele. Felhasználva az oszthatóságokat, és a nagyságviszonyokat, tekintsük át x lehetséges értékeit!

$x = 2$-re y az $x+2 = 4$ osztója, de 2 nem lehet, tehát nincs megoldás. $x = 3$-ra y az $x+2 = 5$ osztója, tehát csak 5 lehet, de a 9 nem osztja a $2 \cdot 5 + 7 = 17$-et. $x = 5$-re $y = 7$ az egyetlen lehetőség, de $3 \cdot 5 \not| 2 \cdot 7 + 7$. $x = 7$-re $y = 3$, de $3 \cdot 7 \not| 2 \cdot 3 + 7$. És végül $x = 11$-re $y = 13$, ez könnyen ellenőrizhetően megoldás, és a gondolatmenetünk szerint más megoldás nem is létezik.

« NMMV 1993. 10/3 »

23. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs kizárólag prímekből álló pithagoraszi-számhármas, azaz a $p^2 + q^2 = r^2$ egyenletnek nincs megoldása a prímek halmazán.

3. Oszthatósági feladatok prímekre

24. Feladat. Keressük meg az összes olyan p prímet melyre

(a) $8p^2 + 1$,

(b) $2018p^2 + 1$ prím.

Általánosítsunk!

Ötlet. $18163 = 41 \cdot 443$.

25. Feladat. Rendezzük sorba az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyeket, hogy a kapott hatjegyű szám prím legyen.

26. Feladat. A kétjegyű számokat 35-től 42-ig egymás mellé írjuk tetszés szerinti sorrendben. Hány prímszám van az így kapható 16 jegyű számok között?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2001. 9. osztály 4. feladat »

27. Feladat. Van-e olyan n természetes szám, melyre $2018^n - 1$ és $2018^n + 1$ is prím? Általánosítsunk!

28. Feladat. Igazoljuk, hogy egy háromnál nagyobb prímszám négyzeténél eggyel kisebb szám mindig osztható 24-gyel.

29. Feladat. Két prímről tudjuk, hogy az összegük is prím, valamint, hogy az összegük és a szorzatuk szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg ezeket a prímeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1987., 10.osztály, 5. feladat »

30. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 5-nél nagyobb prímszám, akkor $p^4 - q^4$ osztható 60-nal!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1997. 10. osztály 3. feladat »

31. Feladat. Keressük meg az összes olyan p prímet melyre
(a) $p + 10, p + 110, p + 1110$,
(b) $p + 10, p + 14$,
(c) $p + 2, p + 6, p + 8, p + 14$,
(d) $10p - 1, 10p + 1$ is prím.

32. Feladat. Mely p pozitív prímszámokra lesz $2p + 1$, $3p + 2$, $4p + 3$, $6p + 1$ mindegyike prímszám?

Ötlet. Vizsgáljuk az öttel vett osztási maradékot.
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 9. osztály 2. feladat »

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha p és $p^2 + 8$ prím, akkor $p^2 + p + 1$ és $p^2 + 3p + 1$ is az. Találjunk ki mi is hasonló feladatokat!

34. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $p + q$ és $p^2 + q^2 - q$ is prím.

35. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan p, r számpárt, amelyre p, r és $\frac{p+r}{p-r}$ is pozitív prímszám.

«KöMaL C. 1672.»

Ötlet. Vizsgáljuk p, r hármas maradékainak egymáshoz való viszonyát.

36. Feladat. Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre a $p + q$ és $p^2 + q^2 - p - q - 1$ is prím.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2007. 10. osztály 4. feladat »

37. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $pq - 1$ és $pq + 1$ is prím.

38. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha p és q háromnál nagyobb prímszám, akkor $7p^2 + 11q^2 - 39$ nem prímszám.

Ötlet. Használjuk: Minden 3-nál nagyobb prímszám felírható vagy $6k + 1$, vagy $6k - 1$ alakban. (Miért?)
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2004. 9. osztály 6. feladat »

39. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor $p^2 + 7q^2 - 23$ nem prímszám.

Ötlet. Használjuk az előző feladat ötletét.
« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1995. 10. osztály 2. feladat »

40. Feladat. Mely n természetes szám esetén lesz prím a(z)
(a) $n^4 + 4n^2 + 3$,
(b) $n^3 + 3n^2 + n + 3$,
(c) $n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$,
(d) $n^3 - 2n^2 - 4n + 8$,
(e) $25^n + 2 \cdot 5^n + 1$,
kifejezés értéke?

Ötlet. Alakítsunk szorzattá.

41. Feladat. Keressük meg az $a^4 + 4$ ($a \in \mathbb{N}$) alakú prímeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1976., 9.osztály, 5. feladat »

42. Feladat. Keressük meg mindazokat a p prímeket, melyekre $2p + 1$ köbszám.

« Szőkefalvi, 2009. »

43. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $p^q + q^p$ is prím.

44. Feladat. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy $34a = 43b$. Mutassuk meg, hogy $a + b$ nem prím.

Ötlet. $34 = 33 - 1, 43 = 44 - 1$.

« KöMaL B. 3293. »

45. Feladat. András és Béla egyaránt elmúltak már 5 évesek, és mindkettőjük életkora prímszám, sőt ha András annyi idős lesz, mint Béla most, akkor Béla életkora ismét prím lesz. Igazoljuk, hogy akkor, amikor András született, Béla életkora osztható volt 6-tal.

46. Feladat. Hány olyan p prím van, melyre nem teljesül tetszőleges a egész szám esetén, hogy

$$p|(a+1)^2 + (a+2)^2 + \ldots + (a+p)^2?$$

« Pest Megyei Matematikaverseny »

47. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan p, q prímszámot, melyre az $x^2 - qx + p = 0$ egyenlet gyökei egészek.

48. Feladat. Keressük meg azokat a p prímeket, amelyekre a $p^2 + 11$ számnak pontosan 6 pozitív osztója van.

Ötlet. $p^2 + 11 = (p - 1)(p + 1) + 12$.

49. Feladat*. Minden pozitív egész n-re jelölje A_n azon pozitív egészek halmazát, amelyek nem relatív prímek n-hez. Milyen n-ekre következik $x, y \in A_n$-ből, hogy $(x + y) \in A_n$?

Megoldás. Mivel az 1-hez minden szám relatív prím, azért A_1 az üres halmaz, így $x, y \in A_1$-ből $x+y \in A_1$ nyilvánvalóan teljesül. Legyen most $n > 1$. Ha $n = p^k$ prímhatvány, akkor egy szám vagy relatív prím n-hez, vagy osztható p-vel. Ha tehát $x, y \in A_n$, akkor x és y osztható p-vel, így az összegük is, tehát $x + y \in A_n$ következik. Ezek a számok tehát megfelelőek. Megmutatjuk, hogy ha n prímosztóinak száma legalább 2, akkor vannak olyan x és y számok, amelyek nem relatív prímek n-hez, míg az összegük az. Legyenek n prímosztói $p_1, p_2, \ldots, p_m$, $m \geq 2$. Legyen $x = p_1$ és $y = p_2p_3 \ldots p_m$. Ekkor x és y nyilván nem relatív prím n-hez. Az $x + y$ számnak viszont nincs 1-nél nagyobb közös osztója n-nel, hiszen nem osztható az n egyetlen prímosztójával sem. Tehát $x, y \in A_n$, $x + y \notin A_n$; a megoldást pontosan a prímhatványok jelentik.

« KöMaL Gy. 3151. »

50. Feladat. Igazoljuk, hogy az egész számok körében a felbonthatatlanként definiált prímek rendelkeznek a prímtulajdonsággal.

4. Prímekkel kapcsolatos tételek, „nevezetes” prímek

4.1. Ikerprímek

51. Feladat. Határozzuk meg azokat a p és q ikerprímszámokat, amelyekre $p^2 - pq + q^2$ is prím. (A p és q prímszámok ikerprímek, ha $|p-q| = 2$.)

« KöMaL C 346. »

52. Feladat. Igazoljuk, hogy a 3-nál nagyobb $(p;q), (r;s)$ ikerprímek esetén $12|qs - pr$.

53. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a $p, q > 2$ prímekre p^2q és q^2p összegének és különbségének hányadosa egész, akkor az osztható 6-tal.

Megoldás. A feladat feltételei alapján $p + q = kp - kq$, ahonnan $q(k+1) = p(k-1)$. Mivel $(p;q) = 1$, ezért p osztója $k+1$-nek, q osztója $k-1$-nek, azaz $k+1 = rp$ és $k-1 = sq$, tehát $qrp = psq$ vagyis $r = s$. Ezek szerint $k = rp - 1 = sq + 1$, ahonnan $r(p-q) = 2$. Így csak $r = 1$ és $p - q = 2$ lehetséges. (A másik eset: $r = 2, p = 3, q = 2$ nem felel meg a feladat feltételeinek.) Ezek szerint p és q ikerprímek és innen k a köztük lévő egész, vagyis osztható 6-tal, ahol k, r, s megfelelő egész számokat jelölnek. (Ha nem követlejük meg a p, q prímekről, hogy páratlanok legyenek, akkor a feladat állítása nem igaz: $p = 2, q = 3$ esetben a hányados egész és 5.)

4.2. Fermat-számok

54. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor szükségképpen n kettőhatvány. (Ezek az ún. Fermat-számok, illetve Fermat-prímek.) Igaz-e az állítás megfordítása?

Ötlet. Használjuk, hogy ha l páratlan, akkor

$$a^l + b^l = (a+b)(a^{l-1} - a^{l-2}b + \cdots + b^{l-1}).$$

55. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely két Fermat-szám relatív prím, azaz bármely $n > m \geq 0$ egész számok esetén $2^{2^n} + 1$ és $2^{2^m} + 1$ relatív prímek.

Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{m+1}})^{2^{n-m-1}} - 1 = ((2^{2^{m+1}})^{2^{(n-m-1)-1}} - 1) \cdot ((2^{2^{m+1}})^{2^{(n-m-1)-1}} + 1) \\ &= A \cdot (2^{2^{m+1}} + 1) = A \cdot (2^{2^m} - 1) \cdot (2^{2^m} + 1) \end{aligned}$$

A fenti átalakítássorozatban az $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ azonosságot alkalmaztuk, az utolsó előtti lépésben a rövidség kedvéért $n - m - 1$-szer. A fentiekben az A a szorzat ki nem írt tényezőinek szorzata, így természetesen egész. Kaptuk tehát,

$$2^{2^m} + 1 \,|\, 2^{2^n} - 1$$

ami az oszthatóság definíciója szerint azt jelenti, hogy létezik olyan k egész szám, hogy

$$(2^{2^m} + 1) \cdot k = 2^{2^n} - 1$$

átrendezve:

$$2^{2^n} + 1 = (2^{2^m} + 1)k + 2$$

Így

$$(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = (2^{2^m} + 1, (2^{2^m} + 1)k + 2) = (2, 2^{2^m} + 1) = 1$$

Az utolsó lépésben a legnagyobb közös osztóra vonatkozó, jól ismert $(a, a \cdot k + b) = (a, b)$ azonosságot alkalmaztuk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

56. Feladat. Az előző feladat eredményének segítségével igazoljuk, hogy végtelen sok prím van. (Pólya György)

57. Feladat. Igazoljuk, hogy ha F_n jelöli az n-edik Fermat-számot, akkor $F_{n+1} = F_n(F_n - 2) + 2$

58. Feladat. Igazoljuk, hogy ha F_n jelöli az n-edik Fermat-számot, akkor $F_{n+1} = F_1F_2 \dots F_n + 2$.

Megoldás. Használjuk az előző feladat eredményét.

4.3. Mersenne-prímek

59. Feladat. Mi a GIMPS?

60. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2^p - 1$ prím, akkor szükségképpen p prím. (Ezek az ún. Mersenne-prímek.)

Megoldás. Ha p nem prím, akkor felírható két, egynél nagyobb szám szorzataként, legyen $p = nk$. Ekkor

$$2^p - 1 = 2^{nk} - 1 = (2^k)^n - 1^n = (2^k - 1)((2^k)^{n-1} + (2^k)^{n-2} + \ldots + 1),$$

ami két egynél nagyobb szám szorzata, tehát nem prím.

61. Feladat. Igaz-e az előző állítás megfordítása?

Megoldás. A megfordítás nem igaz, tehát abból, hogy p prím, még nem következik, hogy $2^p - 1$ is az lenne például: $2047 = 23 \cdot 89 = 2^{11} - 1$.

4.4. Csebisev-tétel

Csebisev-tétel: Bármely n pozitív egész szám esetén létezik p prímszám, hogy $n < p \leq 2n$.

62. Feladat. Igazoljuk, hogy Csebisev-tételéből következik, hogy ha $n > 4$, akkor n és $2n$ között van olyan természetes szám, amely két különböző prím szorzata.

63. Feladat. Igazoljuk, hogy Csevisev-tételből következik a következő tétel: Ha $n > 1$, akkor $n!$ prímtényezős alakjában van legalább egy olyan prímtényező amely az első hatványon szerepel.

Megoldás. Az állítás $n = 2, 3$ esetben nyilván fennáll. A továbbiakban $n > 3$. (1) eset: $n = 2k$. Ekkor a Csebisev-tétel értelmében létezik olyan p prímszám melyre $k < p < 2k = n$. Kettővel beszorozva az első egyenlőtlenséget kapjuk: $2k = n < 2p$. Összevetve $p < n < 2p$. Ekkor $n!$ felbontásában p az első kitevőn szerepel. (2) eset: $n = 2k + 1$. Ekkor a Csebisev-tétel értelmében létezik olyan p prímszám melyre $k < p < 2k < n$. Ekkor $k + 1 \leq p$, azaz $2k + 2 \leq 2p$, vagyis $n = 2k + 1 < p$. Összevetve $p < n < 2p$. Ekkor $n!$ felbontásában p az első kitevőn szerepel.

Megjegyzés: A két tétel valójában ekvivalens.

4.5. Dirichlet-tétel

Dirichlet-tétel: Ha az a, b pozitív egészekre $(a; b) = 1$, akkor az $a, a+b, a+2b, \ldots$ sorozatban végtelen sok prím van.

64. Feladat. Igazoljuk Dirichlet tételének felhasználásával, hogy tetszőleges n pozitív egész számhoz létezik olyan p prímszám, hogy p-nek legalább n számú jegye 0.

4.6. Tökéletes, bővelkedő és hiányos számok

Tökéletes, bővelkedő és hiányos számok: Jelölje $s(n)$ az $n > 1$ pozitív egész szám önmagánál kisebb osztóinak az összegét. Így $s(2) = 1, s(3) = 1, s(4) = 3, s(5) = 1, s(6) = 6, \ldots, s(12) = 15$. Ha $s(n) < n$, azt mondjuk, hogy n *hiányos szám*, ha $s(n) > n$, akkor n *bővelkedő szám*, s ha $s(n) = n$, akkor n-t *tökéletes szám*nak nevezzük.

65. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy páros szám $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím, akkor tökéletes.

Megoldás. Mivel 2^p-1 prím, ezért p is szükségképpen prím. Belátjuk, hogy ekkor n összes(!) pozitív osztóinak összege $2n$. Mivel $2^p - 1$ prím, ezért n összes osztóinak összege:

$$1+2+\ldots+\ldots+2^{p-1}+(2^p-1)(1+2+\ldots+\ldots+2^{p-1}) = 2^p(1+2+\ldots+\ldots+2^{p-1}) = 2^p(2^p-1) = 2n.$$

Ezzel beláttuk, hogy egy ilyen alakú páros szám tökéletes.

Megjegyzés: Igaz a fenti tétel megfordítása is, vagyis tudjuk, hogy egy páros szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím alakú.

66. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám a kettes számrendszerben 1...10...0 alakú, ahol eggyel kevesebb 0 van, mint 1-es.

67. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám háromszögszám. (Egy pozitív egész szám háromszögszám, ha valamely pozitív egész n-re $1 + 2 + \ldots + n$ alakú.)

68. Feladat. Igazoljuk, hogy a tökéletes számok (pozitív) osztóinak reciprokösszege 2.

69. Feladat. Igazoljuk, hogy egy $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú tökéletes szám (pozitív) osztóinak száma $2p$.

70. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám harmonikus. (Egy pozitív egész szám harmonikus, ha osztóinak harmonikus közepe egész.)

Megoldás. Az osztók harmonikus közepe tulajdonképpen az osztók száma osztva az osztók reciprokösszegével. Ezekről korábban láttuk, hogy egy $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú tökéletes számra $2p$, illetve 2, ezek hányadosa pedig p, ami egész.

71. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) a prímek hiányosak,
(b) a prímhatványok hiányosak,
(c) ha az n páratlan számnak csak két prímosztója van, akkor n hiányos.

72. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n = 2^{p-1}$, ahol $2^p - 1$ Mersenne-prím, akkor n szupertökéletes. (A k szupertökéletes, ha $\sigma(\sigma(k)) = 2k$, ahol σl jelöli l összes osztóinak összegét.)

Megoldás. Legyen $n = 2^{p-1}$, ahol $2^p - 1$ Mersenne-prím. Ekkor

$$\sigma(n) = 1 + 2 + \ldots + 2^{p-1} = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1.$$

És $\sigma(2^p - 1) = 1 + 2^p - 1 = 2^p = 2n$.

Megjegyzés: Igaz az állítás megfordítása is.

4.7. Prímeket adó polinomok

73. Feladat. *Euler* olyan egész együtthatós polinomot talált

$$f(x) = x^2 + x + 41$$

amely 40 egymást követő egész helyen prímet ad ($x = 0, 1, 2, \dots 39.$) Miért nem működik tovább az $x = 40, 41$ helyeken?

74. Feladat. *Escott* polinomja, 1899-ből a:

$$g(x) = x^2 - 79x + 1601$$

az $x = 0, 1, 2, \dots 79$ értékekre prímet ad. Igazoljuk, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom amely minden pozitív egész helyen prímet ad.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $f(n) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom az n_0 helyen prímet ad, azaz $f(n_0) = p$. Ekkor tekintve valamely $n_0 + pt$ helyen felvett helyettesítési értéket:

$$\begin{aligned} f(n_0 + pt) &= a_k(n_0 + pt)^k + a_{k-1}(n_0 + pt)^{k-1} + \dots + a_1(n_0 + pt) + a_0 = \\ &= (a_k {n_0}^k + a_{k-1}{n_0}^{k-1} + \dots + a_1 n_0 + a_0) + p \cdot g(t) = \\ &= f(n_0) + p \cdot g(t) = p + p \cdot g(t) = p(1 + g(t)). \end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy a fenti helyettesítési érték nem lehet prím, ahol $g(t)$ megfelelő egész együtthatós polinom.

4.8. További nevezetes prímek

75. Feladat. Keressünk az alábbi nevezetes tulajdonságokkal rendelkező prímeket!

(a) Az olyan prímszámot nevezzük *balról csonkolható*nak, amelynek (tízes számrendszerben) balról elhagyva a kezdő számjegyeit mindig prímet kapunk.
(b) Az olyan prímszámot nevezzük *jobbról csonkolható*nak, amelynek (tízes számrendszerben) jobbról elhagyva a záró számjegyeit mindig prímet kapunk.
(c) A p prímet *biztonságos*nak nevezzük, ha $\frac{p-1}{2}$ is prím.
(d) Azt mondjuk, hogy a p prím *Sophie Germain-prím*, ha $2p + 1$ is prím.
(e) A *Bölcsföldi-Birkás prímek* olyan prímszámok, melyek minden számjegye prím, a számjegyek száma prím, és a számjegyek összege is prím.
(f) *Fibonacci-prím*ek a Fibonacci-sorozat prím elemei.
(g) *Csillag-prímek* a $6n(n - 1) + 1$ alakú prímek. (Miért hívjuk így őket?)
(h) *Euklideszi-prímek* azok a prímek melyek $\Pi p_n + 1$ alakban írhatók, ahol Πp_n az első n prím szorzata.
(i) *Mírpszámok (emirp)* azok a nem palindrom prímek, melyeket visszafele olvasva is prímet kapunk.
(j) *Palindrom prímek* azok a prímek melyek visszafele olvasva önmagukat adják.
(k) *Permutálható prímek* azok a prímek, melyek jegyeinek tetszőleges sorrendje prímet ad.
(l) *Pierpont-prímek* a $2^n 3^m + 1$ alakú prímek.
(m) *Prímnégyesek* A $(p; p + 2; p + 6; p + 8)$ rendezett négyesek, ahol mind a négy szám prím.
(n) *Thabit-prímek* A $3 \cdot 2^n - 1$ alakú prímszámok.
(o) *Wagstaff-prímek* A $\frac{2^n+1}{3}$ alakú prímszámok.
(p) *Wilson-prímek* Olyan p prímszámok, amelyekre $p^2 | (p - 1)! + 1$.

Megoldás.

(a) 13; 17; 23; 37; 43; 47; 53; 67; 73; 83; 97; 113; 137; 167; 173

(b) 23; 29; 31; 37; 53; 59; 71; 73; 79; 233; 239; 293
(c) 5; 7; 11; 23; 47; 59; 83; 107; 167; 179; 227; 263
(d) 2; 3; 5; 11; 23; 29; 41; 53; 83; 89; 113; 131
(e) 23, 223
(f) 2; 3; 5; 13; 89; 233
(g) 13; 37; 73; 181; 337; 433; 541
(h) 2; 3; 7; 31; 211
(i) 13; 17; 31; 37; 71; 73; 79; 97; 107
(j) 2; 3; 5; 7; 11; 101; 131; 151; 181; 191; 313
(k) 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 31; 37; 71; 73; 79; 97; 113; 131; 199; 311; 337; 373; 733; 919; 991; 1111111111111111111
(l) 2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 37; 73; 97; 109; 163
(m) (5; 7; 11; 13); (11; 13; 17; 19); (101; 103; 107; 109)
(n) 2; 5; 11; 23; 47; 191; 383
(o) 3; 11; 43
(p) 5; 13; 563

5. Kirándulás Párosországba

Az alábbiakban képzeljük el, hogy egy olyan országba tévedtünk, ahol csak a páros számokat ismerik: $2, 4, 6, \ldots$. Itt az összeadás, kivonás, szorzás művelet a szokásoknak megfelelően elvégezhető, mert páros számok összege, különbsége, szorzata is páros.

76. Feladat. Igazoljuk, hogy a Párosországban végzett maradékos osztás során a maradék lehet ugyanakkora, sőt nagyobb is, mint az osztó.

77. Feladat. Mik itt a felbonthatatlanok? (A pozitív egészek halmazában a q szám felbonthatatlan, ha $q = ab$-ből következik, hogy $q = a$, vagy $q = b$.

78. Feladat. Igazoljuk, hogy itt nem igaz, hogy egy nem felbonthatatlan szám lényegében egyértelműen bontható felbonthatatlanok szorzatára.

79. Feladat*. Mik a prímek?