Elemi matematika 4. - MTN621g

Skatulya-elv

Bevezető feladatok

A következő, „születési” feladatokban számoljunk 365 nappal, illetve 52 héttel egy évben.

1. Feladat. Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki a hét ugyanazon a napján született?

2. Feladat. Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki ugyanabban hónapban született?

3. Feladat. Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki az év ugyanazon napján született?

4. Feladat. Egy iskolának van 870 diákja, 92 tanára és 28 osztálya. Döntsük el, melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül. Vizsgáljuk a paraméterek megváltoztatásának hatását az állítások igazságértékére vonatkozóan.

(a) Van olyan osztály, amelyikbe legalább 30-an járnak.
(b) Van két diák, aki az év ugyanazon napján született.
(c) Van három diák, aki az év ugyanazon napján született.
(d) Van négy diák, aki az év ugyanazon napján született.
(e) Van nyolc tanár, aki ugyanabban a hónapban született.
(f) Van egy olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született mint valamelyik tanár.
(g) Van olyan osztály, amelyikben legalább öt tanár tanít.

5. Feladat. Egy dobozban lemezek vannak, egyre 1-es, kettőre 2-es, és így tovább, végül száz darabra 100-as van írva. Legalább hány lemezt kell kivennünk a dobozból (csukott szemmel, visszatevés nélkül), hogy biztosan legyen a kivett lemezek között 10, amelyiken ugyanaz a szám van?

Megoldás. $1 + 2 + \ldots + 9 + 9 \cdot 91 + 1 = 865.$

6. Feladat. Egy dobozban lemezek vannak, egyre 1-es, kettőre 2-es, és így tovább, végül n darabra n van írva. Határozzuk meg n értékét, ha tudjuk, hogy legalább 5 020 darabot kell kivennünk a dobozból (csukott szemmel, visszatevés nélkül) ahhoz, hogy biztosan legyen a kivett lemezek között 15, amelyiken ugyanaz a szám van.

7. Feladat. Az $1, 2, \ldots 100$ számok közül 27-et kiválasztva igazoljuk, hogy van a kiválasztottak között kettő, melyek nem relatív prímek. (Használjuk ki, hogy 1 és 100 között 25 prím van.)

8. Feladat. Van-e 12 olyan, egész számokból álló, nemkonstans mértani sorozat, amelyek tartalmazzák az első 100 pozitív egész számot?

Ötlet. Igazoljuk, egy egész számokból álló mértani sorozatban nem lehet 3 különböző prímszám. Használjuk, hogy az 1 és 100 között 25 prímszám van.

9. Feladat. Egy iskolának 750 tanulója van. Egy 100 pontos dolgozatot megírva, egyedül a legrosszabb tanuló ért el 69 pontot, a többiek ennél többet. Igazoljuk, hogy van legalább 25 tanuló akik ugyanazt a pontszámot érték el. (Természetesen (?) minden pontszám pozitív egész szám, és 100 pontnál több nem szerezhető. - Mennyire kell „pontosnak” lennie egy feladat szövegének? Mennyiben hagyatkozhatunk arra, hogy a megoldó érti / érteni akarja a feladat kitűzőjének szándékát?)

10. Feladat. Legalább hány tanulója van annak az iskolának, ahol tudjuk, hogy egy 100 pontos tesztet megírva a legrosszabb eredmény 75 pontos lett, és van legalább 30 diák, aki ugyanannyi pontot szerzett?

11. Feladat. Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék, tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén, akkor van három azonos színű, egyidős tehén ugyanabból a faluból.

12. Feladat. Egy tíztagú társaságban mindenki legalább hét másikat ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely három embernek van közös ismerőse.

«Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, haladók, II. ford. (szakközépiskolások versenye), 1986.»

Ötlet. Három ember írja fel egy listára az ismerőseit.

13. Feladat. 6 sziget mindegyikét vagy hajó, vagy repülőjárat köti össze. (Minden járat pontosan két szigetet köt össze.) Igazoljuk, hogy van 3 sziget, melyek azonos járművel körbeutazhatók.

14. Feladat. 17 tudós mindegyike levelezik a többivel angol, német vagy francia nyelven. Igazoljuk, hogy van három, akik egymást közt ugyanazt a nyelvet használják.

«VI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, Moszkva, 1964. alapján»

15. Feladat. Általánosítsuk az előző feladatot, három nyelv helyett négy, öt, ... nyelvre.

16. Feladat. Egy kiránduláson 60 gyerek vett részt, és tudjuk, hogy közülük bármely 10-et kiválasztva, lesz a kiválasztottak között legalább 3 tanuló, akik osztálytársak. (Minden diák egyetlen osztályba jár, és minden osztályba jár legalább két tanuló.) Igaz-e, hogy szükségszerű, hogy a 60 gyerek között legyen

(a) 15

(b) 16 akik osztálytársak?

Oszthatóság, sorozatok

17. Feladat. Legfeljebb hány különböző pozitív egész számot írhatunk fel egy táblára, ha azt akarjuk, hogy semelyik

(a) kettő összege,

(b) különbsége,

(c) sem összege sem különbsége, ne legyen osztható 10-zel?

18. Feladat. Igazoljuk, hogy 12 különböző kétjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége azonos számjegyekből áll.

Megoldás. Vizsgáljuk a 11-gyel vett osztási maradékokat. Mivel 12 számunk van, és csak 11 lehetséges 11-es maradék, a skatulya-elv értelmében lesz (legalább) két szám, melyek 11-gyel vett osztási maradéka megegyezik, tehát különbségük osztható 11-gyel, így mivel a különbség kétjegyű, azonos jegyekből áll.

19. Feladat. Adott nyolc háromjegyű szám, amelyeket kettesével egymás mellé írva hatjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon. Azt tapasztaljuk, hogy minden esetben találunk közöttük 7-tel osztható hatjegyű számot. Miért?

«KöMaL K. 276.»

20. Feladat. Legyen adott n darab természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy mindig kiválasztható közülük néhány (legalább egy) úgy, hogy azok összege osztható n-nel.

Ötlet. Jelölje a számokat $a_1; a_2; \dots; a_n$. Tekintsük az $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots a_1+a_2+\dots+a_n$ számokat.

21. Feladat*. Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melyek összege osztható $(1+2+\dots+n)$-nel.

Megoldás. Felhasználjuk az előző feladat állítását.
1. eset: az n páratlan; $n = 2k-1$, és $1+2+\dots+n = k(2k-1)$.

Minden $0 \le i < (2k-1)$-re van az $n = 2k-1$ szomszédos egész között egy, amely kongruens i-vel modulo $2k-1$; jelölje ezt a számot a_i. Tekintsük a következő összegeket: $a_0, a_1+a_{2k-2}, a_2+a_{2k-3}, \dots, a_{k-1}+a_k$. Ezek mindegyike osztható $(2k-1)$-gyel, és az előző feladat szerint kiválaszthatunk közülük néhány olyat, amelynek az összege k-val is osztható. A kiválasztott összegek összege néhány különböző a_i összege, és osztható k-val és $(2k-1)$-gyel is. Mivel a k és a $2k-1$ relatív prímek, a kiválasztott a_i számok összege $k(2k-1)$-gyel is osztható.

2. eset: az n páros; $n = 2k$, és $1+2+\dots+n = k(2k+1)$.

Az $n = 2k$ szomszédos egészhez vegyünk hozzá még egy „tiltott" számot. Az így kapott $2k+1$ szomszédos egész között minden$0 \le i \le 2k$-ra legyen a_i az, amelyik kongruens i-vel modulo $2k+1$.

Tekintsük a következő összegeket: $a_0, a_1+a_{2k}, a_2+a_{2k?1}, \dots, a_k+a_{k+1}$. Ez $k+1$ összeg, mindegyik osztható $(2k+1)$-gyel; az egyik összegben szerepel a tiltott szám.

A tiltott számot nem tartalmazó k összeg közül az előző feladat megoldása szerint válasszunk ki néhányat, amelynek az összege osztható k-val. A kiválasztott összegek összege néhány eredeti (nem tiltott) a_i összege, és osztható k-val és $(2k+1)$-gyel is. A k és a $2k+1$ is relatív prímek, tehát a kiválasztott ai számok összege osztható $k(2k+1)$-gyel, kész vagyunk.

22. Feladat*. Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor $n+k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k+1)$-et úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen.

«KöMaL B. 4921.»

Megoldás. Az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk nemnegatív egész k-ra és pozitív egész n-re. Az indukció kezdőlépéseként $k = 0$ mellett igazoljuk az állítást, ehhez azt kell megmutatnunk, hogy n egész szám közül ki lehet választani néhányat (legalább egyet) úgy, hogy a kiválasztott számok összege n-nel osztható legyen. Ez az előző feladat.

Tegyük fel most, hogy valamely k-ra (és ezen k mellett minden n-re és minden szám-$(n+k)$-asra) már igazoltuk az állítást. Meg fogjuk mutatni, hogy $(k+1)$-re is teljesül. Legyenek tehát $a_1, a_2, \dots, a_{n+k+1}$ tetszőleges egész számok. Az indukciós feltevés szerint kiválasztható közülük legalább k, melyek összege osztható n-nel. (Hiszen bármelyik számot elhagyva, a maradék $n+k$ szám közül is kiválasztható.) Ha az így kapott összeg legalább $k+1$ tagú, akkor készen vagyunk. Ha pontosan k tagú az n-nel osztható összeg, akkor tegyük fel, hogy ez az összeg $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}$ (ez a szimmetria miatt feltehető). Az indukció kezdőlépését ismét használva az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül kiválasztható néhány (de legalább egy) szám úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen. Ehhez az összeghez a k tagú $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}$ összeget hozzáadva egy legalább $k+1$ tagú n-nel osztható összeget kapunk.

23. Feladat. Adott 20 darab különböző pozitív egész szám úgy, hogy egyik sem nagyobb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik között van négy egyenlő. (Mindig a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet.)

Ötlet. Legyenek a számok $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 70$. Gondolkozzunk indirekten, tekintsük az $a_{20} = (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1$ előállítást.

24. Feladat. Egy tanuló 20 héten keresztül feladatokat old meg, mindennap legalább egyet, de hetente legfeljebb 13-at. Igazoljuk, hogy kiválasztható néhány egymást követő nap úgy, hogy azokon összesen pontosan 19 feladatot old meg.

«(KöMaL N.21.)»

Ötlet. Dolgozzunk az első i nap alatt megoldott feladatok számaival.

25. Feladat. Egy kör kerületére felírtunk 101 pozitív egész számot, melyek összege 300. Igazoljuk, hogy van köztük néhány szomszédos, melyek összege 200.

Ötlet. Jelölje a számokat $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$. Tekintsük az $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ összegeket.

26. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely tizenhatjegyű pozitív egész számnak van néhány (legalább egy) egymást követő számjegye, melyek szorzata négyzetszám.

Ötlet. Igazoljuk, hogy bármelyik szorzat, amely egymást követő számjegyekből képezhető $2^a 3^b 5^c 7^d$ alakú. Vizsgáljuk a kitevők paritásait.

27. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $n+1$ különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész, akkor van közöttük három olyan szám, melyek közül valamely kettő összege a harmadik.

Ötlet. $a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$, $a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$

28. Feladat. Az első $4n$ pozitív egész számot osszuk tetszőlegesen n halmazba. Igazoljuk, hogy mindig lesz olyan halmaz, amelyikben van három olyan szám, amelyek lehetnek egy háromszög oldalainak hosszúságai.

29. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 0 és az 1 számjegyekből áll.

30. Feladat. Igazoljuk, hogy az 2019-nek van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 1 számjegyből áll.

31. Feladat. Igazoljuk, hogy az 2019-nek van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) minden számjegyet tartalmaz legalább egyszer.

32. Feladat*. Igazoljuk, hogy az $\overline{ab}, \overline{aab}, \overline{aaab}, \ldots$ sorozatban, ahol a és b 0-tól különböző számjegyek, végtelen sok összetett szám van.

Megoldás. Ha b páros, vagy 5, készen vagyunk, a továbbiakban feltehetjük, hogy nem az. Ekkor $(10; \overline{ab}) = 1$. Ekkor a fentiek alapján, van olyan *csupaegy* szám, amely osztható $\overline{ab}$-vel. Ha ez a szám m jegyű, akkor minden k pozitív egész számra a fenti sorozat $km+1$-edik tagja

$\overline{ab} + a(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{km+1}) = \overline{ab} + 100a(1 + 10^1 + \ldots + 10^{km-1}) = \overline{ab} + 100a\dfrac{10^{km} - 1}{9}$ alakú, vagyis ez a szám $\overline{ab} + 100a \cdot 111\ldots 1 \cdot (1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots + 10^{(k-1)m})$, vagyis osztható $\overline{ab}$-vel.

33. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n-re létezik olyan Fibonacci-szám, amely n darab 0-ra végződik.

34. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$ és $(m; n) = 1$, akkor van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $n | m^k - 1$.

35. Feladat. Igazoljuk, hogy a 3-nak van olyan pozitív egész kitevős hatványa, melynek a 2011-gyel vett osztási maradéka 1.

36. Feladat. Léteznek-e olyan n és m pozitív egész számok, amelyekre $10^{200} \mid 7^n - 3^m$?

37. Feladat*. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész k-nak van olyan többszöröse az $[1; k^4]$ intervallumban, amelynek tízes számrendszerbeli alakja legfeljebb négy különböző számjegyet tartalmaz.

Megoldás. Feltehetjük, hogy $10^4 \leq k$, mert ha k legfeljebb négyjegyű, akkor a feladat állítása nyilvánvaló. Tekintsük azokat a $(0 =)a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában csak a 0 és az 1 számjegyek szerepelnek. Ha a tízes számrendszerbeli alakokat a kettes számrendszerben képzeljük el, akkor világos, hogy így minden természetes számot felsorolhatunk, és mindegyiket csak egyszer (tehát a_i-ből éppen i lesz). Ezért $a_{2^n} = a_{100\ldots0_n} = 100\ldots0 = 10^n$. A skatulyaelv szerint az $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ számok között van kettő, amelyek k-val osztva ugyanazt a maradékot adják, azaz e két szám (pozitív) különbsége osztható k-val. Az írásbeli kivonás szabályait használva megállapíthatjuk, hogy e különbség tízes számrendszerbeli alakja csak a 0, 1, 8 és 9 számjegyeket tartalmazhatja, az pedig nyilvánvaló, hogy a különbség nem haladhatja meg a_k-t. Így elegendő belátnunk, hogy $a_k \leq k^4$. A fenti összefüggés - és a megoldás elején tett feltevés - segítségével ez is egyszerű: $a_k \leq a_{2^{\lceil \log_2 k \rceil}} = 10^{\log_2 k} < 10^{1+\log_2 k} = 10^{(\log_2 10)(\log_2 k)} = 10 \cdot k^{\log_2 10} = (10^2 \cdot k^{2\log_2 10})^{1/2} < (k \cdot k^{2\log_2 10})^{1/2} = (k^{\log_2 200})^{1/2} < (k^{\log_2 256})^{1/2} = k^4$.

38. Feladat. 100 kavicsot 50 kupacba rendezünk úgy, hogy egyik kupac sem üres. Igazoljuk, hogy a kupacok két csoportba tolhatók úgy, hogy a két csoportban 50-50 kavics van.

«KöMaL Gy. 2304.»

Ötlet. Ha minden kupacban egyenlő számú kavics van, akkor készen vagyunk. Ha van két nem egyenlő számú kavicsot tartalmazó kupac (a_1, a_2), akkor tekintsük az $a_1, a_2, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{50}$ 51 számot.

39. Feladat*. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n + 2$ darab egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek négyzetének különbsége osztható $2n + 1$-gyel.

«NMMV 2007. 11/3»

40. Feladat. Az első 25 pozitív egész szám közül kiválasztunk 17 darabot. Igazoljuk, hogy a kiválasztott számok között biztosan lesz két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

«NMMV 2007. 9/6»

Ötlet. Írjuk fel a pozitív egész számokat a^2b alakban, ahol a pozitív egész és b négyzetmentes pozitív egész.

41. Feladat. Adottak az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

«NMMV 1998. 11/3»

Táblázatok, téglalapok

42. Feladat. Igazoljuk, hogy a sakktáblára 31 bábut állítva lesz olyan  alakú rész, ahol nem áll bábu.

Ötlet. Osszuk a táblát 2×2-es négyzetekre.

43. Feladat. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

«Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1995. 10. osztály 1. feladat»

44. Feladat. Egy 5×9-es téglalapot feldaraboltunk 10 olyan téglalapra, melyek oldalai egész hosszúságúak. Igazoljuk, hogy van közöttük két egybevágó.

Ötlet. Vizsgáljuk a lehetséges legkisebb területeket.

45. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy sakktáblára fölállítunk 42 bábut, akkor lesz olyan 4×4-es résztábla, amelynek átlós mezőin legalább 4 bábu áll.

«Arany Dániel Matematika Tanulóverseny, kezdők, II. ford. 1984.»

Megoldás. Az alábbi táblázat azt mutatja, az egyes mezők hány 4×4-es tábla átlós mezői.

1	1	1	2	2	1	1	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	3	5	6	6	5	3	1
2	4	6	8	8	6	4	2
2	4	6	8	8	6	4	2
1	3	5	6	6	5	3	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	1	1	2	2	1	1	1

Így legalább $20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 76$ olyan 4×4-es résztábla lesz, amelynek átlós mezőjére figura esik, de a sakktáblán 25 4×4-es résztáblát helyezhetünk el, így biztosan lesz olyan, amely átlós mezőiben legalább 4 bábu áll.

46. Feladat. Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki a 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 1001-et, biztosan lesz a kiválasztottak között két olyan szám, amelyek különbsége 4.

«NMMV 2000. 9/3»

Ötlet. Rendezzük el a számokat egy 4x500-as táblázatba!

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 5 & 9 & \dots & 1993 & 1997 \\
2 & 6 & 10 & \dots & 1994 & 1998 \\
3 & 7 & 11 & \dots & 1995 & 1999 \\
4 & 8 & 12 & \dots & 1996 & 2000
\end{array}$$

47. Feladat. Egy négyzet alakú 100-szor 100-as táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írunk. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőbe írt szám különbsége legfeljebb 10. Bizonyítsuk be, hogy van 6 olyan mező a táblázatban, amelyekbe azonos számokat írtunk.

«NMMV 2002. 10/6»

48. Feladat. A Hupikék Törpikék 1001×945 méteres erdejében 1280 darab 1 méter átmérőjű fenyőfa él. A törpök szeretnének 7 darab 20×34 méteres teniszpályát kijelölni az erdőben. Lehetséges-e ez anélkül, hogy egyetlen fenyőt is ki kellene vágniuk?

«KöMaL B.3622., Bolyai Csapatverseny 2022., körzeti forduló, 10. osztály »

49. Feladat*. Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges valós számok. Igazoljuk, hogy létezik olyan x valós szám, amelyre a fenti $x + a_i$ számok mindegyike irracionális.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz bármely x esetén van a fenteik között racionális szám. Jelöljön α irracionális számot, ekkor az $2\alpha, 3\alpha, \dots, (n+1)\alpha$ számok mindegyike irracionális. Tekintsük számoknak az alábbi táblázatát:

$$\begin{array}{cccc}
\alpha + a_1 & \alpha + a_2 & \dots & \alpha + a_n \\
2\alpha + a_1 & 2\alpha + a_2 & \dots & 2\alpha + a_n \\
3\alpha + a_1 & 3\alpha + a_2 & \dots & 3\alpha + a_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(n+1)\alpha + a_1 & (n+1)\alpha + a_2 & \dots & (n+1)\alpha + a_n
\end{array}$$

Az indirekt feltevésünk szerint a táblázat minden sorában van racionális szám, de $n+1$ sor és n oszlop ezért kell lennie két racionális számnak ami ugyanabban az oszlopban van, ezek különbsége $(i-j)\alpha$ alakú és racionális, ami ellentmondás.

Geometriai feladatok

50. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely véges, egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

51. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van két, azonos oldalszámú lapja.

52. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott a koordinátasíkon 5 rácspont, akkor van közöttük kettő, melyeket összekötő szakasz a belsejében is tartalmaz rácspontot.

«KöMaL P.53.»

53. Feladat. Adott egy négyzet, melynek átlója 2 egység. Melyik az a legkisebb d szám, amelyre igaz, hogy a négyzetben öt pontot felvéve mindig lesz kettő, melyek távolsága nem nagyobb mint d?

54. Feladat. Egy egységkocka minden pontját három szín valamelyikével színezzük. Igazoljuk, hogy mindig van két azonos színű pont, melyek távolsága legalább 1,4.

55. Feladat. A sík pontjait 2011 színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy minden n-re ($n \geq 3$) található végtelen sok olyan konvex n-szög, amelyeknek a csúcsai azonos színűek!

Ötlet. Tekintsünk egy kört!

56. Feladat. Egységsugarú körlapon hét pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van két pont, melyek távolsága nem nagyobb mint 1.

Ötlet. Osszuk fel a körlapot 6 egybevágó körcikkre.

57. Feladat. A sík pontjait három színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy van két azonos színű pont, melyek egységnyi távolságra vannak egymástól.

Ötlet. Tekintsünk egy egység oldalú szabályos háromszöget.

58. Feladat. A sík pontjait véges sok színnel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan téglalap, amelynek a csúcsai azonos színűek.

Ötlet. Tekintsünk a síkon egy négyzetrácsot. Tegyük fel, hogy a rácspontok színezéséhez n-féle színt használtunk fel. Tekintsünk $n+1$ függőleges helyzetű rácsegyenest.

59. Feladat. Egy 3×6 cm-es téglalapban elhelyeztünk nyolc pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között található két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{5}$ cm-nél!

«Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny»

60. Feladat. Egységnyi oldalhosszú négyzetben 51 pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van a pontok között három, melyek lefedhetők egy a) 1/5 oldalú négyzettel, b) 1/7 sugarú körlappal.

61. Feladat. Egy $5 \times 5 \times 10$-es téglatestben adott 2001 pont. Igazoljuk, hogy van kettő, melyek távolsága kisebb, mint 0,7.

Ötlet. Borítsuk be a téglatestet körbe egy 0,35 egység széles réteggel.

62. Feladat. Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal.

«NMMV 1999. 9/5»

63. Feladat*. Mutassuk meg, hogy bármely 13 különböző valós szám között található két olyan: x és y, hogy $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$. (Használjuk, hogy $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.)

Megoldás. Legyen $x = \operatorname{tg}\alpha, y = \operatorname{tg}\beta$. Ekkor a bizonyítandó $0 < \operatorname{tg}(\alpha-\beta) < 2-\sqrt{3}$ alakban írható, és feltehető, hogy a 13 x_i számra $x_i = \operatorname{tg}\alpha_i$, ahol $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. A tangensfüggvény itt szigorú monoton növekvő, s a skatulya el miatt van két olyan x_i, x_j érték, melyekre $|x_i - x_j| < \dfrac{\pi}{12}$. Mivel $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$ készen vagyunk.

64. Feladat. Egy egységsugarú gömbben 9 légy röpköd. Igazoljuk, hogy van közöttük kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{3}$.

65. Feladat. Adott a síkon 1997 darab pont úgy, hogy semelyik három sincs rajta ugyanazon az egyenesen és bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb 1 területegység. Mutassuk meg, hogy létezik olyan egységnyi területű háromszöglap, amellyel a pontok közül legalább 500-at le lehet fedni.

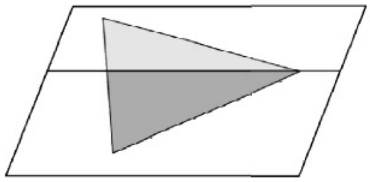
Ötlet. Tekintsük a(z egyik) maximális területű háromszöget.

66. Feladat*. Egy egységnyi területű négyzetben adott 101 pont úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy az általuk meghatározott háromszögek között van olyan, amelyiknek a területe legfeljebb 0,01 területegység.

Megoldás. Osszuk fel a négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 50 darab egybevágó, $0{,}2 \times 0{,}1$-es méretezésű téglalapra. A skatulya-elv miatt lesz olyan téglalap, melyre az adott pontok közül három illeszkedik. Felhasználjuk azt az ismert állítást (bizonyítását lásd alább), hogy egy paralelogrammába írt háromszög területe legfeljebb a paralelogramma területének fele. Az említett három pontot kiválasztva, az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb $\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ ami bizonyítja a feladat állítását. A felhasznált állítás bizonyítása.

(a) Ha a háromszög két csúcsa rajta van a paralelogramma ugyanazon oldalán, vagy valamely oldaltól ugyanakkora távolságra van, akkor a területképletek miatt azonnal készen vagyunk.

(b) Ellenkező esetben válasszuk ki az egyik oldalt, és húzzunk párhuzamost a tőle mért távolság szerinti középső ponton keresztül ezzel az oldallal. Így két paralelogrammára



bontjuk az eredetit, valamint két háromszögre a pontok által meghatározott háromszöget. Vegyük észre, hogy a két kisebb háromszög és az őket tartalmazó paralelogrammák az (a) pontban említett helyzetben vannak, így visszavezettük arra a (b) helyzetet.

67. Feladat. Igazoljuk, hogy van a π-nek olyan pozitív egész számú többszöröse, amely egy egész számtól legfeljebb $0,000001$-gyel tér el.

Ötlet. Tekerjük fel a számegyenes nemnegatív félegyenesét egy egységkerületű körre.

68. Feladat. Igazoljuk, hogy a $|\sin n|$ alakú számok halmazának (n nem negatív egész) van legalább két olyan eleme, amelyek kisebbek $\frac{1}{1000}$-nél!

«NMMV 1997. 11/6»

Megoldás. A 0 eleme a halmaznak ($\sin 0 = 0$), ezért elég egyetlen további megfelelő n-et találni. Mivel bármely n, k pozitív egészre $|\sin n| = |\sin(n - k\pi)|$, azért elég igazolni, hogy vannak olyan n, k pozitív egészek, melyeknél $|n - k\pi| < \frac{1}{1000}$.

Ennek belátásához tekintsük az $\{\pi\}, \{2\pi\}, \ldots, \{1001\pi\}$ számokat. Ezek mind különbözők lesznek, mert bármelyik kettő egyenlősége esetén $p\pi - [p\pi] = q\pi - [q\pi]$ állna fenn, ami viszont lehetetlen, mert ekkor $(p - q)\pi$ egész lenne, tehát π racionális lenne. $\{\pi\}, \{2\pi\}, \ldots, \{1001\pi\}$ mindegyike 0 és 1 közé esik. Így van köztük kettő, amelyek különbsége abszolútértékben kisebb, mint $\frac{1}{1000}$. Legyenek ezek p és q ! Ekkor

$$|[p\pi] - [q\pi] - (p - q)\pi| < \frac{1}{1000}$$

Ebben az esetben pedig $n = [p\pi] - [q\pi]$, $k = q - p$ megfelelő értékek lesznek, $|n - k\pi| < \frac{1}{1000}$.

69. Feladat*. Igaz-e, hogy minden irracionális számnak van olyan nemnulla egész számú többszöröse, amelynek tizedes jegyei között végtelen sokszor szerepel a 0 és 9 számjegyek egyike?

«KöMaL N.83.»

Megoldás. Megmutatjuk, hogy igenlő a válasz a kérdésre. Legyen α a szóban forgó irracionális szám, amelyről feltehetjük, hogy pozitív. Kiindulási ötletünk az, hogy ha két pozitív többszörös megegyezik az n-edik tizedesjegyében, akkor nemnegatív különbségük n-edik jegye 0 vagy 9. Valóban, legyenek $k \leq l$ olyan egészek, amelyekre $k\alpha$ és $l\alpha$ megegyezik az n-edik tizedesjegyben, más szóval $[10^n k\alpha] \equiv [10^n l\alpha] \pmod{10}$. Ekkor a valós számok körében könnyen ellenőrizhető $[x] - [y] - 1 < [x - y] \leq [x] - [y]$ egyenlőtlenséget az előző kongruenciával egybevetve kapjuk, hogy $[10^n(k - l)\alpha] \equiv 0$ vagy $9 \pmod{10}$. Mivel a bal oldal nemnegatív, éppen azt kaptuk, hogy a nemnegatív $(k - l)\alpha$ különbség n-edik tizedesjegye 0 vagy 9. Ezek után a skatulya-elv kétszeri alkalmazásával érünk célba. Először is, mivel egy adott helyen álló tizedesjegy értéke egy számban csak 10-féle lehet, ezért minden n-hez található olyan $1 \leq k_n < l_n \leq 11$ egész számpár, amelyre $k_n\alpha$ és $l_n\alpha$ megegyezik az n-edik tizedesjegyében. Másodszor, a (kn, ln) párokat egy véges, $\binom{11}{2}$ elemű halmazból válogattuk, ezért kell lennie egy (k, l) párnak, amely végtelen sokszor szerepel. Ekkor $k\alpha$ és $l\alpha$ tizedestört alakja végtelen sok jegyben megegyezik, azaz a fenti észrevétel alapján $(k - l)\alpha$ olyan többszöröse α-nak, amelynek jegyei között végtelen sokszor szerepel 0 vagy 9. Ezzel a feladatot megoldottuk.

70. Feladat*. Melyik az a legkisebb k természetes szám, amelyre igaz a következő állítás? „Ha egy tetraéder élszögei között van k darab 60°-os, akkor a tetraéder csak szabályos lehet.”

«KöMaL Gy. 3245.»

Megoldás. Egy tetraéder szabályos, ha minden lapja szabályos háromszög, és lapszögei is egyenlők. Megmutatjuk, hogy a legkisebb ilyen k szám a hét. Ha $k = 6$, akkor lehetséges, hogy a tetraéder két lapja szabályos háromszög, és ez a két lap például 90°-os szöget zár be. Ekkor a tetraéder nem szabályos. Ha $k = 7$, akkor a skatulya-elv szerint van legalább két olyan lap, amelyeknek legalább két szöge 60°, és ezeken kívül még van legalább egy olyan lap, amelynek legalább egy szöge 60°-os. Ennek az utóbbi lapnak két oldala közös az előbbi egybevágó szabályos háromszöglapokkal, tehát egyenlő szárú, és mivel van egy 60°-os szöge, szabályos lesz. A negyedik lap mindhárom éle az eddig leírt három egybevágó szabályos háromszög élei közül kerül ki, így ez a lap - és maga a tetraéder is - szabályos.