Elemi matematika 1. - MTN224g

JÁTÉKOS SZÁMELMÉLETI FELADATOK

1. Feladat. Nyuszika bemegy az erdei boltba és vesz néhány dolgot: 10 kg répát, 4 fej káposztát és 3 fej salátát. Az árcédulák sajnos kissé elmosódottak, csak a következő olvasható rajtuk:

Répa	2. Ft/kg
Káposzta	.2 Ft/fej
Saláta	..1 Ft/fej

Ravaszdi Róka, a boltos 647 forintot számolt. Ekkor Nyuszika megemlítette, hogy legjobb barátja a Medve. Az ijedt Róka helyesbítette számolását 621 forintra. Honnan tudta Nyuszika, hogy a Róka át akarja verni? Mennyi volt (lehetett) egy-egy zöldség egységára?

2. Feladat. Számtanórán megkérdezték a gyerekeket, hogy hány lába van összesen egy tyúknak, hat kutyának és hét palpigradinak (a palpigradi egy állat latin neve). Aladár szerint 46, Benő szerint 52, Cecília szerint 66, Dóra szerint 78, Eufrozina szerint pedig 82. Melyiküknek van igaza?

« ZRÍNYI »

3. Feladat. Egy piacai árus tyúk- és kacsatojásokat árult. A tojások kosarakban vannak, az egyes kosarakban 4, 6, 12, 13, 22, és 29 tojás van, de mindegyikben van mindkét fajtából. *Ha ebben a kosárban lévő tojásokat eladom akkor pontosan kétszer annyi kacsatojás marad, mint tyúktojás* - gondolta az árus. Melyik kosárra gondolt?

Megoldás. A maradék összegnek oszthatónak kell lennie hárommal. Ez csak a 29-es eladása után teljesül.

4. Feladat. Tudjuk, hogy

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = \overline{3603xy}.$$

A szorzás elvégzése nélkül határozzuk meg a hiányzó számjegyek értékét!

5. Feladat. Fejtsük meg a varázsgömb működési elvét: Gondolj egy kétjegyű számra! Add össze a két számjegyét! Vond ki az eredeti számból! Keresd meg a hozzá tartozó szimbólumot (a szemeddel) és kattints a gömbre!

http://luethje.eu/geheim/zauberkugel.htm

6. Feladat. Hét rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek belőle annyit, amennyi az ott levő aranyak számának számjegyösszege. (Pl. ha a soron következő zsivány előtt 182 arany van, akkor ő 1+8+2=11 darabot vesz el.) Miután mind a heten pontosan kétszer vettek az aranyból, az arany elfogyott. Hatuknak egyformán jutott az aranyból, míg a főnök bármelyiküknél többet vett el. Hányadik a névsorban a főnök, és hány arany jutott neki?

« VARGA TAMÁS MATEMATIKAVERSENY, 1993. 3. FORDULÓ 3. FELADAT 7. OSZTÁLYOSOK VERSENYE »

7. Feladat. A 948 és a 417 mindegyikét ugyanazzal a kétjegyű számmal elosztva egyenlő maradékokat kapok. Mekkora a maradék?

Ötlet. Dolgozzunk a különbséggel.

« VARGA TAMÁS MATEMATIKAVERSENY, 1992. 1. FORDULÓ 4. FELADAT 6. OSZTÁLYOSOK VERSENYE »

8. Feladat. Gyermekeim életkorának szorzata 1664 év. Én magam 50 éves vagyok, s legfiatalabb gyermekem is legalább fele annyi idős, mint a legidősebb. Hány gyermekem van?

9. Feladat. -Három elefántot kell berakodnunk - szólt a hajóskapitány az elsőtiszthez.
- És hány évesek ezek az elefántok? - kérdezte az elsőtiszt.
- Mindegyik elmúlt már két éves, és életkoraik szorzata 2450 - volt a válasz.
- Hát életkoraik összege?
- Azt fölösleges elárulnom, mert abból még nem tudnád megállapítani életkorukat. - mondta a kapitány, majd hozzátette - az egyikük idősebb nálam.
- Akkor már tudom, hogy hány évesek az elefántok - mondta az elsőtiszt.

Feltéve, hogy tényleg tudta, ... hány éves a kapitány?

« Gerőcs László: Repeta matek 2 »

10. Feladat. Az idén, tehát 2003-ban felhívott telefonon egykori matematikatanárom, és egészségi állapotára panaszkodott. Kissé udvariatlanul megkérdeztem, hogy hány éves. Erre a következőt válaszolta: Ha azt az évszámot, amelyben 43 éves voltam, megszorzom azzal az évszámmal, amelyben 45 éves voltam, majd elosztom születési évszámommal, akkor megkapom azt az évszámot, amelyben... Ekkor megszakadt a vonal, és sokáig nem is tudtam újrahívni. Szerencsére a fent közölt adatokból ki tudtam számolni, hogy melyik évben született. Vajon hány éves most egykori tanárom?

Megoldás. Ha x a születési évszám, akkor

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x} = \frac{x^2+88x+1935}{x} = x+88+\frac{1935}{x}$$

egész, de ez csak $x = 1935$ esetén lehetséges, hiszen 1935 következő legnagyobb osztója, a 645 már nem lehet a születési évszám.

Tehát a tanárom most, 2003-ban 68 éves.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2003. 9. osztály 1. feladat »

11. Feladat. A szultán börtönében száz cella van, 1-től 100-ig számozva, mindegyikben egy rab. A cellák zárján minden kulcsfordítás változtat a zár „állapotán”, ha nyitva volt bezárja, ha zárva volt kinyitja. A szultán lánya esküvője alkalmából amnesztiát hirdet. Száz fogdaőrt indít útnak. Az első minden zárban fordít egyet a kulcson. A második már csak minden másodikban, tehát a 2, 4, 6,..., 100-as celláékban. A harmadik minden harmadikban (3, 6,...). És így tovább, a 100. fogdaőrt már csak a 100-as celláéban. Akinek az ajtója nyitva maradt, az szabadul. Mely cellák lakói távozhatnak? (A cellák kezdetben zárva voltak.)

12. Feladat. Felbonthatók-e a 2018-nál nem nagyobb pozitív egész számok két diszjunkt halmazra úgy, hogy a két halmazban lévő számok

(a) összege,
(b) szorzata egyenlő?

Ötlet. Használjuk, hogy a 2017 prím.

13. Feladat. A héten kihúzott lottószámokról (90/5) csak annyit tudunk, hogy van köztük olyan, amellyel bármely kettő összege osztható. Tudjuk azt is, hogy ha ismernénk a legkisebb kihúzott szám paritását, akkor egyértelműen meg tudnánk mondani, mik a kihúzott számok. Mik a kihúzott számok?

14. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10$ kifejezés zárójelezésével $\frac{256}{63}$-ot nem kaphatunk eredményül.

Ötlet. Vizsgáljuk, hogyan állhat $256 = 2^9$ a számlálóban.

« Zrínyi döntő 1997. 8. osztály »

15. Feladat. Határozzuk meg a számjegyek értékét, ha azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{T} & \mathrm{É} & \mathrm{T} \\ + & \mathrm{T} & \mathrm{É} & \mathrm{R} \\ \hline & \mathrm{É} & \mathrm{R} & \mathrm{T} \end{array}$$

16. Feladat. Határozzuk meg a számjegyek értékét, ha azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ + & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{d} \\ \hline & 9 & 8 & 4 & 6 \end{array}$$

Megoldás. Szépen végigzongorázva $d = 3, 8$ eseteket adódik a két megoldás, a, b, c, d-re nézve $2, 7, 1, 3$ illetve $7, 2, 5, 8$.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1998., 9.osztály, 5. feladat »

17. Feladat. Egy háromjegyű szám számjegyeit, összeszoroztuk, majd a szorzat jegyeit is összeszoroztuk. Az eredeti és a kapott számokat így ábrázolhatjuk (azonos jelek azonos, különböző jelek különböző számokat takarnak): $\triangle\heartsuit\heartsuit$, $\triangle\square$, $\square$. Mi volt a kiindulási szám?

« Kalmár László Matematikaverseny 1986. 5. osztály megyei forduló »

18. Feladat. Boldog szám az a pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy ha a számjegyeinek négyzetösszegét összeadjuk, és ezt a folyamatot addig ismételjük, amíg egyjegyű számot nem kapunk, akkor az eredmény 1 lesz. Például boldog szám a 23, mert $2^2+3^2 = 13$, $1^2+3^2 = 10$, $1^2 + 0^2 = 1$. Azt a számot, amelynél a folyamat végeredménye nem 1, boldogtalan számnak nevezzük.

(a) Keressünk boldog számokat.
(b) Igazoljuk, hogy $10^n + 3$ és $10^n + 9$ boldog.
(c) Igazoljuk, hogy egy boldog szám számjegyeit átrendezve boldog számot kapunk.
(d) Igazoljuk, hogy egy boldog számot 10-hatvánnyal szorozva szintén boldog számot kapunk.
(e) Igazoljuk, hogy $10^{150006} + 7426247 \cdot 10^{75000} + 1$ boldog. (Mellékesen ő prím is, sőt, palindrom.)
(f) Találjunk ki (és oldjuk is meg) további boldog számokkal kapcsolatos problémákat.