Elemi matematika 3. - MTN424g

„Játékos” egyenlőtlenségek

Becslések: konstanssal, minimális/maximális taggal, ...

1. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$. Milyen „mélyebb” matematikai összefüggés van az ilyen típusú egyenlőtlenségek mögött? Hogyan tudunk hasonlóalkat kitalálni? Élesíthető a becslés?

(b) $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} < 15$.

(c) $\sqrt{100+\sqrt{99+\ldots\sqrt{2+\sqrt{1}}}} < 11$. (Igaz-e az egyenlőtlenség 100-on „túl” is? Meddig?)

2. Feladat. Általánosítsunk, találjunk ki hasonló feladatokat. (Ezt az elvárást a továbbiakban is minden feladattípus kapcsán tartsuk szem előtt.)

3. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} > n$, ha $n > 1, n \in \mathbb{N}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, ha $n > 1, n \in \mathbb{N}$.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n > 1, n \in \mathbb{N}$, akkor

(a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$,

(b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

(c) $(2n)! < (n^2+n)^n$.

5. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív számokra

$$a+b+c \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca},$$

akkor közülük valamelyik szám legalább 1.

«KöMaL C. 1532.»

Teleszkopikus összegek

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

(a) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$,

(b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$.

Teljes négyzetté kiegészítés, szorzattá alakítás ...

7. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$,

(b) $x^2+y^2+2x-4y+5 \geq 0$,

(c) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$,

(d) $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4} \geq a+b+c$,

(e) $\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{3}$.

8. Feladat. Oldjuk meg az $5x^2+y^2-4xy+24 \leq 10x-1$ egyenlőtlenséget a valós számpárok halmazán.

«KöMaL C. 1534.»

9. Feladat. Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számpárra

$$\frac{(y-6)^2}{3xy}+x\cdot\frac{y+3}{y} \geq 4+x-\frac{4}{x}-\frac{xy}{12}.$$

«KöMaL C. 1476.»

10. Feladat*. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x^4-4x^3+8x^2-8x \leq 96.$$

«KöMaL C. 1444.»

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor
(a) $a^3+b^3 \geq a^2b+b^2a$,
(b) $a^4+b^4 \geq ab(a^2+b^2)$,
(c) $a^2+b^2 \leq \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a}$.

12. Feladat*. Határozzuk meg az $f(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$ függvény minimumát.

13. Feladat*. Mutassuk meg, hogy ha a, bsc valamely egységnyi kerületű háromszög oldalai, akkor

$$a^2+b^2+c^2+4abc < \frac{1}{2}.$$

«KöMaL B. 4667.»