Elemi matematika 4. - MTN621g
Valószínűségszámítás

Az első feladatok...

1. Feladat. (De Méré lovag problémája) Chevaler de Méré lovag az 1600-as évek első felében fordította Blaise Pascal (1623-1662) figyelmét a valószínűségszámítás problémája felé, amikor is megkérdezte, hogy a következők közül melyikre érdemesebb fogadni,
a) Egy szabályos kockával négyszer dobva kapunk legalább egy hatost.
b) Két kockával 24-szer dobva kapunk legalább egyszer dupla hatost.
Állítólag a lovag megoldása szerint mindkét esetben azonos a kérdéses valószínűség. (Bár más források szerint a tapasztalatra hagyatkozva, ő inkább az első eseményt részesítette előnyben.) Mit válaszolhatott Pascal? Hogyan számolt a lovag?

2. Feladat. (A három kocka problémája (Galilei)) Sokáig foglalkoztatta a kockázó embereket (a problémát állítólag Toscana hercege vetette fel) az is, hogy 3 kockával dobva a $9(= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3)$ és $10(= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4)$ összeg is ugyanannyi féleképp jöhet ki, mégis a tapasztalatok azt mutatták, hogy érdemesebb a 10-re fogadni. Miért? Van-e még olyan összeg amire ugyanolyan érdemes fogadni, mint a 10-re?

A következő feladatok jelentős része egyszerű, „példatárszagú”, ám a részfeladatok között akadhatnak kifejezetten nehezek is, melyek megoldása alig képzelhető el a megelőző részfeladatok megoldása nélkül. A bevezető feladatokat nem tárgyaljuk részletesen a kurzuson, viszont a megoldásukhoz szükséges módszerek, rutinok, trükkök, eljárások, technikák ismerete elengedhetetlen a tárgyalt feladatok megoldásához, ezért a feladatok házi feladatként történő megoldása ajánlott.

3. Feladat. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.
A: A dobott számok szorzata prím.
B: A dobott számok szorzata öttel osztható.
C: A dobott számok szorzata páros.
D: A dobott számok szorzata legalább 12.
E: A dobott számok szorzata egyjegyű.
F: A dobott számok összege prím.
G: A dobott számok összege öttel osztható.
H: A dobott számok összege páros.
I: A dobott számok összege legalább 12.
J: A dobott számok összege egyjegyű.
K: Az első szám nagyobb, mint a második.
L: A második dobás eredménye megegyezik az első dobás eredményével.
M: Elsőre háromszor annyit dobtunk, mint másodikra.
N: A dobott számok relatív prímek.
O: A dobott számok szorzata vagy összege páros.
P: A dobott számok szorzata és összege is páros.
Q: A dobott számok szorzata és összege is páratlan.

4. Feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy dobókockát hatszor feldobva
(a) minden lehetséges érték pontosan egyszer jelenik meg;
(b) pontosan kétféle számot dobunk;

(c) a dobott számok szorzata páratlan;
(d) a dobott számok szorzata páros;
(e) a dobott számok összege hárommal osztható;
(f) a dobott számok szorzata osztható 4096-tal;
(g) először a harmadik dobásra dobunk hatost;
(h) a dobott számok szorzata prím.

5. Feladat. Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Az első dobás eredménye fej.
(b) Az első és utolsó dobás eredménye különböző.
(c) Ugyanannyi fejet dobtunk, mint írást.
(d) Legalább nyolc fejet dobtunk.
(e) Legfeljebb 9 írást dobtunk.
(f) Több írást dobunk, mint fejet.

6. Feladat. Egy pakli 32 lapos magyar kártyából kihúzunk nyolc lapot (visszatevés nélkül, a sorrendre való tekintet nélkül). Határozzuk meg a következő események valószínűségét.

(a) Nálunk van a piros ász.
(b) Csak zöldet húzunk.
(c) Pontosan két színből valók a lapjaink.
(d) Húzunk figurát is.
(e) Nem húzunk makkot.
(f) Nem húzunk makkot és figurát sem.
(g) Pontosan három király van nálunk.
(h) Több piros van nálunk, mint az összes többi színből együttvéve.

7. Feladat. Az ötös lottón az első 90 pozitív egész szám közül húznak ötöt. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Nem húzzák ki a 43-ast.
(b) A középső kihúzott szám a 43.
(c) A kihúzott számok szorzata páratlan.
(d) A legnagyobb kihúzott szám a 43.
(e) A legkisebb kihúzott szám a 43.
(f) Minden kihúzott szám 34 és 43 között van, beleértve a határokat is.
(g) A legkisebb kihúzott száma a 34, a legnagyobb a 43.
(h) A számok nagyság szerint növekvő sorrendben kerülnek kihúzásra.
(i) Egy szelvényt kitöltve azzal nyerünk (tehát legalább két találatunk van).

8. Feladat. Egy 36 fős osztályba 20 lány és 16 fiú jár. Az osztály öt tagú küldöttséget választ, amelynek egy elnöke és négy tagja van. (Egy ember több tisztséget nem viselhet.) Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Andor lesz az elnök.
(b) Andor az elnök és Balázs a tagok között van.
(c) Andor és Balázs sem szerepel a küldöttségben.
(d) A küldöttség csak lányokból áll.
(e) Az elnök lány, de a tagok mindegyike fiú.
(f) Az elnök fiú és a tagok között többségben vannak a lányok.
(g) Az elnök ellenkező nemű, mint az azonos nemű tagság.

9. Feladat. Az első 9 pozitív egész számot véletlenszerű sorrendben egymás mellé írjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott kilencjegyű szám osztható

(a) 2-vel; (b) 4-gyel; (c) 5-tel; (d) 9-cel; (e) 18-cal?

10. Feladat. Mi annak a valószínűsége, hogy a `MISSISSIPPI` szó betűit egymás után leírva, a 4 S nem kerül egymás mellé?

11. Feladat. Tíz telefonvezetékből négy beázott. Ezek után négy telefonvezetéken hívást kísérelnek meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hívások fele a beázás miatt meghiúsul?

12. Feladat. Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson valamelyik kocsira, azzal nem törődik, hogy a társai melyik kocsiba szálltak.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3-3 tagja szállt?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe nem szállt fel senki a társaság tagjai közül?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel a társaság tagjai közül?

«KöMaL - Emelt szintű érettségi gyakorló feladat»

További kombinatorikus megfontolásokat igénylő feladatok

13. Feladat. Egy kalapban két fehér és két fekete golyó van. Ha csukott szemmel kiveszünk egyszerre két golyót, mi a valószínűsége, hogy különböző színűek?

14. Feladat. Egy fiók mélyén három pár zokni van, amelyek kissé különböznek egymástól. A fiókból egyesével kihalászva a zoknikat, mennyi annak a valószínűsége, hogy három húzás után még nem lesz a kivett zoknik között összetartozó pár?

«KöMaL C. 577»

15. Feladat. Egy zsákban 10 pár különböző cipő van. Négyet kihúzva, mi a valószínűsége, hogy lesz köztük legalább egy összeillő pár?

16. Feladat. Magyar kártyából öt lapot húzva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az öt lap azonos színű vagy annak, hogy van köztük négy azonos szám vagy figura?

«KöMaL C. 1284.»

17. Feladat. Egy parkolóban 8 hely van. Odaérkezve egy autó véletlenszerűen beáll az üres helyek valamelyikére. 4 autó áll már bent, amikor egy busz érkezik. Akkor tud beállni, ha van 4 egymás melletti szabad hely. Mennyi a valószínűsége, hogy ezt meg tudja tenni?

18. Feladat. Egy kör kerületén véletlenszerűen választjuk az A, B, C, D, E, F pontokat. Mi a valószínűsége, hogy az $ABC\Delta$ és az $EFG\Delta$ háromszögek idegenek?

19. Feladat. A Bajnokcsapatok Európa Kupa legjobb 16 csapata közé bejutott két magyar csapat is: a Bolyai TC, és az Eötvös TK. Mi a valószínűsége, hogy egymás ellen játszanak? (A verseny egyenes kiesési rendben folyik; két csapat találkozóján az egyik továbbjut, a másik végleg kiesik. Általánosítsunk 2^n csapatra!

«KöMaL Gy.3177»

20. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy csupa 4-es és 5-ös számjegyekből álló nyolcjegyű szám osztható 9-cel?

21. Feladat. Karesz pénztárcájában 5 db 20 Ft-os van. Édesanyja betett a húszasok mellé néhány 10 Ft-ost is. Hány db tízest kapott Karesz, ha ezek után a pénztárcájából találomra kiválasztott érme 0,8 valószínűséggel 10 Ft-os?

22. Feladat. Egy osztályban küldöttet választottak, minden tanuló azonos valószínűséggel kap szavazatot. Annak a valószínűsége, hogy fiút választanak, 2/3-a annak, hogy lányt. Az osztály tanulóinak hányadrésze fiú?

23. Feladat. Pisti polcán könyvek állnak, véletlenszerű sorrendben. Annak valószínűsége, hogy a három angol nyelvű egymás mellett áll, éppen $0,01$. Hány könyve van Pistinek?

24. Feladat. Egy urnában 18 sárga és néhány fehér illetve piros golyó van. Mennyi az urnában lévő fehér illetve piros golyók száma, ha annak valószínűsége, hogy fehér, vagy piros golyót húzunk 1/15-del kisebb, mint mint annak a valószínűsége, hogy fehér vagy sárga golyót húzunk. Továbbá, annak a valószínűsége, hogy piros, vagy sárga golyót húzunk, 10%-kal nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy fehér, vagy sárga golyót húzunk.

25. Feladat. Egy urnában n golyó van. Egyet kihúzunk majd visszatesszük. Ezt az eljárást n-szer megismételve, mi a valószínűsége annak, hogy mind az n golyó a kezünkbe került?

26. Feladat. Kettétörünk n darab pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják a párokat?

27. Feladat. Jelölje m/n annak valószínűségét, hogy a 10^{99} pozitív osztói közül olyat választunk, (bármely osztó választásának azonos a valószínűsége) amely 10^{88}-nak többszöröse. Mennyi $m + n$ minimális értéke? (Persze m és n pozitív egészek.)

«USA érettségi, 1988.»

28. Feladat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy kétjegyű szám négyzetének utolsó számjegye 6 legyen?

29. Feladat. Egy 31 fős osztályban a szokásos módon akarják egymást karácsonykor megajándékozni a gyerekek: december elején az egyik osztályfőnöki órán egy kalapba beleteszik a 31 nevet, és sorban mindenki kihúzza annak a nevét, akinek ajándékot készít. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzást meg kell ismételni, mert valaki a saját nevét húzta?

30. Feladat. A kétjegyű pozitív egész számok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy a két számnak van közös számjegye?

«KöMaL C. 1557., 2019. szeptember»

31. Feladat. Egy urnában 101 golyó van, köztük pontosan 3 piros. Az urnából visszatevés nélkül egyesével húzunk. Hányadik helyen a legvalószínűbb a második piros húzása?

32. Feladat. Két zsákban piros és fehér golyók vannak. A kisebbikben 20 piros és 20 fehér, a nagyobbikban 1005 piros és 995 fehér golyó található. Tetszésünk szerint kiválasztjuk az egyik zsákot, ebből kihúzunk egy golyót, megnézzük és félretesszük, majd ismét tetszésünk szerint kiválasztunk a két zsák közül egyet, és kihúzunk belőle egy golyót. Milyen stratégiával érhetjük el, hogy a két kihúzott golyóból a lehető legnagyobb valószínűséggel legyen legalább az egyik piros?

33. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n elemű halmaz részhalmazai közül találomra kiválasztunk egyet, majd újra az összes részhalmaz közül egy részhalmazt, akkor annak a valószínűsége, hogy az egyik tartalmazza a másikat $p = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

34. Feladat. Egy kocka minden lapját pirosra, fehérre vagy zöldre színezzük. Az egyes lapok színét egymástól függetlenül véletlenszerűen választjuk. Minden színt egyforma valószínűséggel választunk. Mi a valószínűsége, hogy lesznek azonos színű szemközti lapok?

35. Feladat. Harminc persely kulcsait véletlenszerűen beledobtuk a zárt perselyekbe, mindegyikbe egyet-egyet. Feltörjük az egyik perselyt. Mennyi a valószínűsége, hogy ezután már mindegyik perselyt ki tudjuk nyitni anélkül, hogy újabbat kellene feltörnünk?

«KöMaL Gy. 2409.»

36. Feladat. A 0, 1, 2 számjegyekből véletlen sorozatot készítünk. Milyen hosszú sorozatok esetén lesz legalább 61% annak a valószínűsége, hogy a sorozatban mindhárom számjegy előfordul? (KöMaL B3576.)

37. Feladat. Pisit csak akkor engedik el szüleik, ha három sakkpartiból legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei Apa és Papa, mégpedig vagy A-P-A, vagy P-A-P sorrendben. Melyik sorrendet válassza Pisti, ha Apa jobban játszik mint Papa?

38. Feladat. Tudjuk, hogy, 366 ember kell ahhoz, hogy biztosan legyen kettő, akik az év ugyanazon napján születtek. De hány ember kell ahhoz, hogy mindez 1/2 valószínűséggel teljesüljön?

39. Feladat. Hány ember kell ahhoz, hogy 1/2 valószínűséggel legyen köztük olyan, akik az év egy kitüntetett napján született, pl. január 1-én?

40. Feladat. Péter jó magasugró, teljesítőképessége határán csak a véletlenen múlik teljesítménye. Edzője szerint 0,54 a valószínűsége annak, hogy teljesíti a 205 cm-es magasságot. Mi a valószínűsége annak, hogy egy versenyen elsőre (ugye a magasugrók háromszor próbálkozhatnak) átugorja a 205 m-t?

41. Feladat. Egy villamoson $p = 0,04$ valószínűséggel jelennek meg az ellenőrök, és a jegy nélkül utazókat 3000 Ft-ra megbírságolják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a bírság fedezi a bliccelők által a lebukásig okozott kárt, ha egy jegy ára 150 Ft?

42. Feladat. Legalább hányszor kell feldobni egy érmét ahhoz, hogy legalább 0,9 valószínűséggel legyen fej a dobások között?

Dobókockás feladatok

43. Feladat. Legalább hány kockával kell dobni ahhoz, hogy legalább 0,5 valószínűséggel legyen legalább egy hatos a dobott számok között? És ha 0,99-os valószínűséget szeretnénk? (Figyeljük meg, hányszor szerepel a legalább szó a mondatban... Meg lehetne-e fogalmazni a feladat szövegét kevesebb legalább segítségével?)

44. Feladat. Négy kockát feldobva, mi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható néggyel? (negykocka.swf)

45. Feladat. Öt dobókockával dobunk egyszerre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három kockán lesz páros szám, kettőn pedig páratlan?

46. Feladat. Öt dobókockával dobunk. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: a „két párnak” vagy a „tercnek”? („Két párt” dobtunk, ha két-két kockán ugyanaz a szám jelenik meg, és ezek különböznek egymástól és az ötödik kockán levőtől is. „Tercet” dobtunk, ha van három kocka, amin ugyanaz a szám szerepel, a többin pedig ettől és egymástól is különböző.)

« KöMaL Gy.2934.»

47. Feladat. Hány dobókocka esetén a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva pontosan egy hatos lesz a kapott számok között?

«KöMaL»

48. Feladat. Arnold, Bendegúz, Cézár, Dorottya, Egon és Ferdinánd szerepjátékhoz készülődik. Még nem döntötték el, melyikük legyen a kalandmester. (Ebben a játékban egyikük a kalandmester, a többiek alkotják a csapatot.) A kalandmester személyéről sorsolással kívánnak dönteni, ehhez a játékban használt 10 oldalú „dobókockával” dobnak a következőképpen: Előre meghatározott sorrendben mindenki egyszer dob a kockával. Az lesz a kalandmester, aki először 1-est, vagy 2-est dob. Ha a kör végére nincs meg a kalandmester, akkor újra kezdik ugyanebben a sorrendben a dobásokat mindaddig, amíg valaki 1-est vagy 2-est nem dob. Dorottya még sohasem vezetett ebben a társaságban játékot, és most nagyon szeretne. A fiúk udvariasak és megengedik neki, hogy megválassza azt, hogy hányadiknak dob. Te mit javasolnál Dorottyának?

«KöMaL B3407.»

Totó, lottó, ...

49. Feladat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lottószámok között nincsenek szomszédosak?

50. Feladat. Mekkora a valószínűsége annak, ami megtörtént az 1969. február 28.-i lottóhúzáson, mikor is a kihúzott számokat emelkedő számsorrendbe állítva, az első két szám összege egyenlő volt a harmadikkal.

«KöMaL P. 34.»

51. Feladat. Mekkora a valószínűsége annak, ami megtörtént az 1987. évi 34. heti lottóhúzáson, mikor is kihúztak két szomszédos számpárt, de nem húztak ki három egymás utáni számot?

52. Feladat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az $1, 2, \ldots 179$ fokos szögekből választott 3, egy különböző oldalú háromszög három szöge?

«KöMaL 995.»

53. Feladat. Egy 12 egység hosszúságú csuklós szakaszt 11 pontban hajlíthatunk meg. A pontok egymástól egységnyi távolságra vannak. Véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy ezek olyanok, hogy ott meghajlítva a szakaszt,

(a) háromszöget
(b) szabályos háromszöget
(c) egyenlő szárú háromszöget
(d) derékszögű háromszöget
(e) hegyesszögű háromszöget
(f) tompaszögű háromszöget kapunk?

Utolsó feladatok...

54. Feladat. Amikor Barnabás egyet bukfencezik, akkor a zsebében lévő n darab üveggolyó bármelyike egymástól függetlenül $0<p<1$ valószínűséggel kiesik a zsebéből. Ha egy bukfenc során legalább egy üveggolyó kiesett Barnabás zsebéből, akkor abbahagyja a bukfencezést, különben folytatja. Tudjuk, hogy miután abbahagyja Barnabás a bukfencezést, éppen 50 százalék eséllyel van páros mennyiségű üveggolyó a zsebében. Mennyi lehetett n értéke?

55. Feladat. Kiömlött a só. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy páros, vagy hogy páratlan számú sószem szóródott szét?

56. Feladat. A lusta pénztáros nem gondoskodott váltópénztől, így üres kasszával nyit. Egy jegy ára 500 Ft, a sorban álló vásárlóknak pedig 50-50 százalékos valószínűséggel vagy egy 500 Ft-osuk, vagy egy 1000 Ft-osuk van. Ha a pénztáros nem tud valakinek visszaadni, a pénztár bezár. Adjuk meg a kiszolgált vevők számának várható értékét. (lusta.swf)

57. Feladat. Pinokkiónak 9-féle akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy hús-vér gyerek lehessen. Nehéz dolga van; ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell térnie az előzőhöz, és ott újra kell próbálkoznia. Ha a legelső akadályon bukik el, akkor fabábu marad örökre. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége mindig 110, 210, 310, ..., 910, akárhányadszor is próbálkozik. Milyen sorrendben rendezze el a Kékhajú Tündér a Pinokkióra váró akadályokat ahhoz, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel változzék át igazi gyerekké, és mekkora ebben az esetben a siker valószínűsége?

58. Feladat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ön lélegzett már be olyan molekulát, amely ott volt Caesar utolsó - Te is fiam, Brutus! - leheletében?

Feltételes valószínűség

59. Feladat. (Prisoner-paradoxon) Három rab raboskodik, A, B és C. Egy véletlenszerűen kiválasztott páros amnesztiában részesül, míg a harmadik nem szabadul ki. Így P(A szabadul)$=2/3$, hiszen összesen 3 lehetséges párosítás van, (AB, AC, BC) míg A szempontjából két kedvező (AB, AC). Az A rab a már megszületett ítéletről érdeklődik az egyik börtönőrnél, de hogy ne kérdezzen rá konkrétan saját szabadulására, csak arra kéri az őrt, nevezzen meg egy szabadulót a többiek közül. Mivel a feladat B-ben illetve C-ben szimmetrikus, feltehetjük, hogy az őr B-t nevezte meg. Ekkor viszont P(A szabadul)$=1/2$, hiszen az összes párok száma ezúttal kettő (AB, BC) míg az A számára kedvező pár mindössze egy van, AB. Tehát a kérdés hatására csökkent az A rab szabadulásának valószínűsége. Hogy is van ez?

60. Feladat. Egy dobozban három koron van, az egyiknek mindkét oldala kék, a másiknak mindkét oldala piros, a harmadiknak az egyik oldala kék, a másik piros. Egy korongot kiveszünk (csukott szemmel) és az asztalra tesszük. Miután láttuk, milyen szín van a korong tetején, meg kell tippelnünk, milyen szín van az alján. Hogyan tippeljünk? Miért? (korong1.swf)

61. Feladat. Feldobunk egy érmét, ha fej egy, ha írás két kockával dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy lesz hatos a dobott számok között?

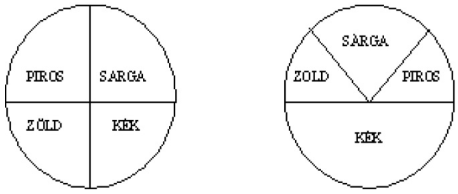
62. Feladat. Egy kockával dobunk. Ha a dobott szám n, akkor n kockával dobunk újra. Mi a valószínűsége, hogy ezalatt legalább egy hatost dobtunk?

63. Feladat. A lottón a 7, 22, 51, 54, 78 számokat játszottam meg. A húzást figyelvén, eddig a 78, 13, 22 számokat húzták ki. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább hármasom van?

64. Feladat. Egy egyetemen a hallgatók matematikusok vagy fizikusok. A matematikus hallgatók 15, a fizikus hallgatók 22%-a vizsgázik sikeresen. Az egyetemen hallgatóinak 40%-a matematikus. Mi a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?

65. Feladat. Egy távírókészüléken a leadott pontok 2/5-e vonallá, a leadott vonalak 1/3-a ponttá torzul. Egy üzenetben a pontok és vonalak aránya, 5 : 3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a küldő pontot küldött, ha a vevő pontot kapott?

66. Feladat. Az alábbi két pörgettyű valamelyikével kétszer pörgetünk, mindkét alkalommal



szabadon választva a pörgettyűk közül. Hogyan válasszunk, ha akkor nyerünk, ha a pörgetés után egy rögzített nyílnál megálló színeket összekeverve lila (kék+piros) jön ki? (Még az első pörgetés előtt meg kell nevezni mindkét pörgetés pörgettyűjét.) Hogyan válasszunk első és második pörgettyűt, ha az első pörgetés ismeretében kell csak másodikat választanunk?

67. Feladat. (a) Egy kétgyermekes családban mi a valószínűsége, hogy az egyik gyermek fiú?
(b) Egy kétgyermekes családhoz megyünk vendégségbe, egy lánygyermek nyit ajtót. Mi a valószínűsége annak, hogy a másik gyermek fiú?
(c) Egy kétgyermekes családhoz megyünk vendégségbe, egy lánygyermek nyit ajtót, aki azt mondja: Az idősebb testvérem edzésen van. Mi a valószínűsége annak, hogy a másik gyermek fiú?

68. Feladat. Egy urnából, melyben három golyó van háromszor húzunk visszatevéssel egy-egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy mindhárom golyó fekete, ha mindhárom húzásra fekete golyót húztunk?

«KöMaL 1090.»

69. Feladat. Tegyük fel, hogy egy betegségben az emberek $0,5\%$-a szenved. Egy, a betegséget kimutató teszt megbízhatóságának 98%-sága jelentse azt, hogy a teszt a beteg emberek 98%-ánál pozitív, 2%-ánál negatív eredményt ad, míg az egészséges emberek 98%-ánál negatív, 2%-ánál pozitív eredményt ad. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Ön beteg, feltéve, hogy a tesztje pozitív?

70. Feladat. (Marilyn vos Savant problémája) Egy játékos előtt három csukott ajtó áll. Az egyik mögött autó, a másik kettő mögött kecske van. Miután a játékos kiválaszt egy ajtót a játékvezető nem azt nyitja ki, hanem egy másikat (természetesen olyat, ami mögött kecske van). Most a játékos választhat, hogy kitart eredeti döntése mellett, vagy átpártol a másik, ki nem nyitott ajtóhoz. Hogyan döntsön?

Geometriai valószínűségi mező

71. Feladat. Mutassunk példát olyan 0 valószínűségű eseményre, amely nem a lehetetlen esemény.

72. Feladat. Egy versenyen minden ejtőernyős egy 10 méter sugarú körben landol. Különdíjat akkor kap egy ugró, ha a körben elhelyezett 2 méter oldalhosszúságú négyzetben landol. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ugrás különdíjas lesz?

73. Feladat. Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont közelebb van a pálca valamelyik végéhez, mint a közepéhez?

74. Feladat. Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont legalább kétszer akkora távolságra van a pálca közepétől, mint valamelyik szélétől?

75. Feladat. Valamely folyosó háromszínű, egyenlően nagy téglalapokkal fedett. Ha a téglák közt 200 darab fehér, és annak a valószínűsége, hogy egy eldobott labda piros lapon áll meg 1/3, hogy feketén 4/9, akkor mennyi a folyosó alapterülete, ha a szabályos hatszögletű téglák egy-egy alapéle 1,2 dm? (A feladat szövegében persze a téglalap nem mint geometriai alakzat értendő, hiszen hatszögletű lapokról van szó.) (Írásbeli érettségi feladat 1912-13., Budapest, kegyes-tanítórendi fg.)

76. Feladat. A $(0, 3)$ intervallumon véletlenszerűen kijelölve egy pontot, annak a valószínűsége, hogy ez a 2-nek r sugarú környezetébe esik 1/5. Mennyi az r?

77. Feladat. Mire használható a következő feladat, illetve annak megoldása? Egy egységoldalú négyzetbe egységnyi átmérőjű kört írunk úgy, hogy a két síkidom középpontja megegyezzen. A négyzet egy pontját véletlenszerűen kiválasztva, mi annak a valószínűsége, hogy az a kör belsejébe esik? (lovesek3.swf)

78. Feladat. Egy folyosó 50 cm oldalhosszúságú négyzet alakú kövekkel van kikövezve. Leejtve egy 2 cm átmérőjű érmét (pl. 5 forintos), mi a valószínűsége annak, hogy az érme fugára esik?

79. Feladat. Egy folyosó 1 cm oldalhosszúságú négyzet alakú kövekkel van kikövezve. Leejtve egy d cm átmérőjű érmét, mi a valószínűsége annak, hogy az érme pontosan egy fugát metsz? Mely d-re a legnagyobb ez a valószínűség?

80. Feladat. Egy egységnyi szakaszon kijelöltünk véletlenszerűen két pontot, három részre osztva ezzel a szakaszt. Mi a valószínűsége annak, hogy a három szakaszból, mint oldalból háromszög szerkeszthető?

81. Feladat. Egy egységnyi szakaszon kijelöltünk véletlenszerűen két pontot. Mi annak a valószínűsége, hogy a pontok közti távolság kisebb, mint a szakasz hosszának a fele? Általánosítsuk 1/2 helyett, tetszőleges $d < 1$ távolságra.

82. Feladat. Egy egységnyi szakaszon kijelöltünk véletlenszerűen két pontot. Egy h számról azt tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a két pont távolsága h-nál kisebb, 1/4 és 3/4 közé esik. Milyen határok között mozoghat h? Használjuk az előző feladat eredményét!

«KöMaL F. 1918.»

83. Feladat. A körvonalon egymástól függetlenül véletlenszerűen kiválasztunk 3 pontot. Mi annak a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott háromszög hegyesszögű?

84. Feladat. Anna és Balázs megbeszélik, hogy 10 és 11 óra között találkoznak a Dómnál. Érkezésük a megbeszélt időben véletlenszerű. Mi annak a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell negyed óránál többet várnia?

85. Feladat. Véletlenszerűen választunk két számot a $(0, 1)$ intervallumban. Mi a valószínűsége annak, hogy összegük 1-nél, szorzatuk pedig $0,16$-nál kisebb?

86. Feladat. Egy félköríven két pont mozog. Mi annak a valószínűsége, hogy a két pontnak egymástól vett távolsága nem nagyobb a félkör sugaránál?

«KöMaL 1954. 595.»

87. Feladat. Az $x^2 + 2ax + b = 0$ egyenlet gyökeit véletlenszerűen választjuk a $(-1, 1)$ intervallumból. Mi annak a valószínűsége, hogy az egyenletek lesz valós gyöke? Általánosítsuk az előbbi feladatot úgy, hogy a-t a $(-c, c)$ míg b-t a $(-d, d)$ választjuk. Ügyeljünk arra, hogy a $d \le c^2$ és $d > c^2$ esetek elvileg különböző bánásmódot igényelnek.

88. Feladat. Egy kocka éleit megszámoztuk az 1, 2, ...12 számokkal. András mond két olyan számot, amelyhez tartozó éleknek van közös csúcsuk, majd Béla is mond két olyan számot (megint az összes közül választva), melyekhez tartozó éleknek van közös csúcsuk. Mi annak a valószínűsége, hogy András éleinek nincs közös csúcsuk Béla éleivel? (oktv.swf)

89. Feladat. Három hajótörött mindegyike egy-egy órát tölt (egyhuzamban) egy szigeten ma délután valamikor 5 és 9 óra között (véletlenszerűen). Ha hármuk közül pontosan kettő fél óránál hosszabb ideig egyszerre tartózkodik ott, akkor viszály tör ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy békében telik el a mai nap?

«OKTV 1995/96 3. kategória 2. forduló 3. feladat»

90. Feladat. (Bertrand-féle (Joseph Bertrand (1822-1900)) paradoxon) Tekintsünk egy kört és válasszuk ki találomra az egyik húrját. Mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott húr hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?
Erre a feladatra az Ön diákjai a következő megoldásokat nyújtják be:
(1) A választandó meghatározza a felezőpontja. Könnyen látható, hogy a húr akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha a középpontja a háromszög beírt körén belül helyezkedik el, ennek sugara pedig fele akkora, mint a kör sugara, így $p = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{r^2\pi} = 1/4$.
(2) A húr hosszát a középpontjának a kör középpontjától vett távolsága is meghatározza. A szimmetria miatt feltehető, hogy a hút középpontja a kör egy rögzített sugarán fekszik. A húr akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha a középpontja legfeljebb $r/2$ távolságra van a kör középpontjától. Így $p = \frac{\frac{r}{2}}{r} = 1/2$.
(3) A szimmetria miatt a húr egyik végpontját rögzíthetjük, (legyen ez a háromszög egyik csúcsa) míg a másikat a körön szabadon választhatjuk. Ez a húr akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha belemetsz abba, ennek valószínűsége pedig, tekintettel arra, hogy a szabályos háromszög szöge 60 fokos, $p = 1/3$. Kinek van igaza?

91. Feladat. (Buffon-féle (Georges Buffon 1707-1788, 1733.) tűkísérlet) A síkon egymástól d távolságra párhuzamos egyenesek fekszenek. A síkra találomra egy l hosszúságú $(0 < l < d)$ tűt ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű átmetsz egy egyenest?

Valószínűségi változók...

92. Feladat. Egy virágkertészet állítása szerint a náluk vásárolt virághagymák 90%-os valószínűséggel kihajtanak. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 megvásárolt hagymából éppen 90 kel ki?

93. Feladat. A polgármester választás egyik jelöltje azt állítja, hogy őt támogatja a választók 60%-a. Mi ezt tesztelendő, megkérdezünk 20 embert, de közülük csak 9 támogatja az előbbi jelöltet. Mi a valószínűsége, hogy 20 ember közül 9, vagy annál kevesebb támogatja a jelöltet, ha az tényleg igazat mondott?

94. Feladat. Az első üdítő megvásárlásakor olyan figurát találunk a kupakban, amely még nincs a birtokunkban (hiszen ez az első üdítőnk). A második üdítő megvásárlásakor 5/6 valószínűséggel találunk a kupakban olyan figurát, amellyel még nem rendelkezünk. Mennyi a második figura megszerzéséhez szükséges kupakok számának várható értéke? A második figura megszerzéséhez szükséges kupakok száma milyen eloszlást mutat? (Esetleg ezt is használhatjuk a várható érték meghatározásánál!) Határozzuk meg a harmadik, negyedik, s.í.t. illetve az összes figura megszerzéséhez szükséges kupakok számának várható értékét!

95. Feladat. Egy urnában n ($n \geq 3$) fehér és kétszer annyi fekete golyó van. Visszatevés nélkül egyszerre kihúzunk három darabot.

(a) Adja meg a kihúzott fehér golyók számának eloszlását!

(b) Hány fehér golyó esetén lesz legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy legalább két golyó van a mintában?

(KöMaL Emelt szintű érettségi gyakorló feladat)

96. Feladat. Egy fénymásoló p valószínűséggel gyűri be a papírt. Mennyi a két begyűrés között fénymásolt papírok számának eloszlása és várható értéke és szórása?

97. Feladat. Mennyi a (90-ből 5) lottóhúzás második legnagyobb számának a várható értéke? (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából 2001/2002, 3. kategória, 1. forduló, 5. feladat)

98. Feladat. Egy klinikán vizsgálatot végeznek egy olyan betegségre vonatkozóan, amely átlagosan 100 ember közül egyet súlyt. Egy vizsgálatra ötven ember jelentkezik. Az igazgató úgy dönt, hogy nem vizsgálja meg az összes vérmintát külön-külön, összeönti azokat. (Persze mindegyik vérből hagy is egy kicsit, esetleges későbbi vizsgálatok céljából.) Így ha a minta negatív, mindenki egészséges (elég tehát egy vizsgálat), ha pozitív, akkor van benne fertőzött vér, de elég csak ekkor az ötven mintát külön-külön megvizsgálni (tehát 51 vizsgálat szükséges). Mennyi a vizsgálatok számának várható értéke? Ha az orvos nem mind az ötven mintát önti egybe, hanem csak két 25-ös csoportot képez, akkor várhatóan hány mérést fog elvégezni? Milyen csoportosítással minimalizálható a vizsgálatok számának várható értéke?

99. Feladat. Egy érmével addig dobunk, amíg fej és írás is lesz a dobottak között. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét. (dobaspenzzel2.swf)

100. Feladat. Egy kockával addig dobunk, amíg valamely korábban dobott szám ki nem jön újra. Adja meg a dobások számának eloszlását és várható értékét!

101. Feladat. Feldobunk két dobókockát, ha a dobott számok összege 7, vagy 11, nyertünk, ha 2, 3, vagy 12 vesztettünk (ezekben az esetekben a játék véget ért), különben újra dobunk. Adjuk meg a nyerés valószínűségét, illetve a dobások számának várható értékét. (dobas2kockaval.swf)

102. Feladat. Ön mond egy számot, 1 és 6 között! A játékmester feldob három dobókockát, ha mindhármon az Ön száma jön ki nyer 3 $-t, ha csak kettőn, akkor nyer 2 $-t, ha csak egy kockán lesz az Ön száma, akkor 1 $-t nyer. Ha viszont egyetlen kockán sem az Ön száma áll, veszít 1$-t. Mennyi ebben a játékban a nyeremény várható értéke?

Bolyongási problémák

103. Feladat. A számegyenes 0 és 5 pontjában egy-egy bolha ül. Minden másodpercben valamely szomszédos egész koordinátájú pontra ugranak, mindkét irány választásának valószínűsége 1/2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) a harmadik másodpercben ugyanott tartózkodnak
(b) a k. másodpercben ugyanott tartózkodnak
(c) az ötödik másodpercben helyet cserélnek

(d) a harmadik másodpercben távolságuk 1 lesz
(e) a k. másodpercben távolságuk 6 lesz?

Baj van a részeg tengerésszel - What shall we do with the drunken sailor?

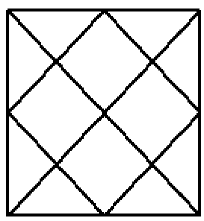
104. Feladat. Egy részeg tengerész a számegyenes 0 pontjában áll, s minden percben 1/2-1/2 valószínűséggel lép jobbra, illetve balra a szomszédos egész számokra. Ha eléri a tengert belesik, ha eléri a kocsmát bemegy. Mekkora valószínűséggel éri el a kocsmát, ha az a $+1$, míg a tenger a -1 pontban van ?

105. Feladat. Egy részeg tengerész a számegyenes 0 pontjában áll, s minden percben 1/2-1/2 valószínűséggel lép jobbra, illetve balra a szomszédos egész számokra. Ha eléri a tengert belesik, ha eléri a kocsmát bemegy. Mekkora valószínűséggel éri el a kocsmát, ha az a $+2$, míg a tenger a -1 pontban van?

106. Feladat. Egy részeg tengerész a számegyenes 0 pontjában áll, s minden percben 1/2-1/2 valószínűséggel lép jobbra, illetve balra a szomszédos egész számokra. Ha eléri a tengert belesik, ha eléri a kocsmát bemegy. Mekkora valószínűséggel éri el a kocsmát, ha az a $+1$, míg a tenger a -2 pontban van?

107. Feladat. Egy részeg tengerész a számegyenes 0 pontjában áll, s minden percben 1/2-1/2 valószínűséggel lép jobbra, illetve balra a szomszédos egész számokra. Ha eléri a tengert belesik, ha eléri a kocsmát bemegy. Mekkora valószínűséggel éri el a kocsmát, ha az a $+k$, míg a tenger a $-t$ pontban van (vagyis inkább kezdődik, a tenger mégsem egy pont ....)?

108. Feladat. Egy sétáló a park közepéről indul, minden kereszteződésben egyenlő valószí-



nűséggel választ a lehetséges utak közül (vissza is fordulhat). Ha eléri a park szélét megáll. Mekkora valószínűséggel jut a park csúcsába? (KöMaL P64.)

Valószínűségi játékok

109. Feladat. Egy érmével addig dobunk, amíg két egymás utáni dobás eredménye azonos nem lesz. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke, és eloszlása?

110. Feladat. Két játékos, Anna és Balázs, a továbbiakban A és B egy szabályos dobókockával játszik. A játékot A kezdi és a kockát felváltva egyszer-egyszer feldobva az nyer, aki először dob hatost.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy A nyer?
(b) Tarthat-e ez a játék örökké?
(c) Határozzuk meg a dobások számának várható értékét.

111. Feladat. Két játékos felváltva dob egy szabályos érmével. Az nyer, aki először dob fejet. Határozzuk meg az egyes játékosok nyerésének valószínűségét! Igazságossá tehető-e a játék, az érme megfelelő cinkelésével?

112. Feladat. Egy urnában a számú fehér és b számú fekete golyó van $a + b = n$. Két játékos, A és B felváltva húz visszatevéssel az urnából egy-egy golyót. Az nyer, aki először húz fehéret. Mekkora a valószínűsége, hogy A nyer?

113. Feladat. A és B felváltva feldob egy szabályos érmét. Az nyer, aki először dob írás után fejet. Mennyi annak a valószínűsége hogy A nyer, ha ő kezdi a játékot?

114. Feladat. A és B egy szabályos érmét feldobva játszik. Az nyer, aki az n. fejet dobja. Mi a valószínűsége, hogy A nyer, ha ő kezdi a játékot?

115. Feladat. A és B felváltva dob egy szabályos érmével. Csak az utolsó 3 dobás eredményét figyelik, A nyer ha ez `fff` és B ha `fif`. Kinek kedvez a játék? Itt tehát nincs jelentősége annak, hogy ki dob, csak az számít melyik nyerő sorozat jön ki előbb.

116. Feladat. A és B három érmével játszik. Az érméket egyszerre eldobva a fejeket átadják a másik játékosnak. Az nyer, akinél először lesz ott mindhárom érme. (Eltekintve persze a kezdőállapottól, amikor mindhárom érme A-nál van.) Mekkora valószínűséggel nyer A, ha ő kezdi a játékot?

117. Feladat. Eszternek és Zsófinak 3-3 forintja van. Egy szabályos érmével dobálnak, fej esetén Eszter kap Zsófitól 1 forintot, írás esetén pedig Zsófi kap Esztertől 1 forintot. Addig játszanak, amíg valamelyikük pénze elfogy. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 100 dobásra sor kerül? (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából 1993/1994, 3. kategória, 1. forduló, 3. feladat)

118. Feladat. Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik stb. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg 3-mal osztható. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer? (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából 1997/1998, 3. kategória, 1. forduló, 4. feladat)