Elemi matematika 4. - MTN621g

Gráfok

1. Feladat. 1736-ban állítólag megkérdezték Eulert, a Szentpétervári Akadémia tanárát, hogy a várost átszelő Pregel folyó hét hídját be lehet-e járni úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer sétálunk végig. Hány hidat kell építeni, hogy ezt megtehessük? És hogy oda érkezzünk, ahonnan indultunk? Miért ez az első feladat?

Egyszerű gráfok - konstrukciók

2. Feladat. Egy hat tagú vendégségben, a házigazda aki mindenkit ismer, megkérdezte, ki hány jelenlévőt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). A következő válaszokat kapta: $1, 4, 2, 3$. Az utolsó választ nem hallotta, mégis ki tudta találni. Mennyi volt az utolsó válasz, és hogyan gondolkodott a házigazda?

3. Feladat. Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot amelynek 6 éle van, és

(a) van benne olyan csúcs, amelynek fokszáma 3,
(b) nem összefüggő,
(c) pontosan két olyan csúcsa van, amelynek fokszáma 4.

4. Feladat. Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot, amelynek fokszámsorozata

(a) 4, 4, 4, 4, 4,
(b) 4, 4, 4, 3, 3,
(c) 3, 3, 2, 2, 2,
(d) 2, 1, 1, 0, 0,
(e) 5, 4, 3, 3, 2,
(f) 4, 4, 3, 2, 1,
(g) 4, 3, 2, 1, 0,
(h) 4, 3, 3, 2, 1.

5. Feladat. Adjuk meg a hiányzó fokszámot/fokszámokat a következő fokszámsorozatokban. Ha több lehetséges megoldás is van, akkor adjuk meg az összes megoldást.

(a) 5, 5, 5, 5, 5, X
(b) 5, 5, 3, 3, 3, X
(c) 5, 5, 5, 5, X, Y
(d) 5, 2, 1, 1, X, Y
(e) 5, 5, 3, 2, X, Y
(f) 5, 5, 3, 1, X, Y

6. Feladat. Adjunk konstrukciót egy olyan $2n$ fős társaságra, ahol mindenki pontosan 3 másik embert ismer.

7. Feladat. Adjunk példát olyan n csúcsú gráfra, amelyben bármely két össze nem kötött pontnak van közös szomszédja, de semelyik két összekötött pontjának nincs közös szomszédja.

Alapvető gráfelméleti tételek és következményeik

8. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely társaságban van legalább két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a jelenlévők között.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van legalább két, azonos oldalszámú lapja.

10. Feladat. Péternek 28 osztálytársa van, s Péter mind a 28 osztálytársának különböző számú barátja van az osztályban. (A barátságok kölcsönösek.) Hány barátja van Péternek az osztályban? Általánosítsunk.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább négy csúcsú) egyszerű gráfban pontosan két azonos fokú csúcs van, akkor az a fokszám szerinti két „középső”.

12. Feladat. Egy táncmulatságon 7 fiú és 7 lány vet részt, akik az est során végig fiú-lány párokban táncoltak. Az est végén mindenki leírta, hány partnerrel táncolt: 3; 3; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6. Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

13. Feladat. Minden véges, egyszerű gráfra igaz, hogy van két azonos fokú csúcsa. Adjunk tetszőleges n-re, $(n > 1, n \in \mathbb{N})$ olyan n csúcsú nem egyszerű véges gráfot, amelyre ez nem igaz.

14. Feladat. Minden véges, egyszerű gráfra igaz, hogy van két azonos fokú csúcsa. Adjunk olyan végtelen egyszerű gráfot amelyre ez nem igaz.

15. Feladat. Igaz-e, hogy egy irányított gráfban mindig van két pont, amelynek ugyanakkora a kifoka?

16. Feladat. Egy informatikus azt a feladatot kapta, hogy kössön össze 2019 számítógépet úgy, hogy mindegyik 365 másikkal legyen összekötve. Hogyan végezze el a feladatát?

17. Feladat. Vegyünk fel a síkon 7 szakaszt úgy, hogy mindegyik 3 másikat metsszen.

Teljes gráfok, fák, ...

18. Feladat. Nyolc csapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással.

(a) Hány meccset játszanak összesen?
(b) Ha eddig minden csapat három mérkőzésén van túl, akkor hány meccs van még hátra?
(c) Eddig már 17 mérkőzést lejátszottak. Igazolja, hogy van olyan csapat amely már 5 mérkőzést játszott.
(d) Legalább hány lejátszott mérkőzés után állíthatjuk biztosan azt, hogy van olyan csapat, amely már legalább 6 mérkőzést lejátszott?

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n csapat körmérkőzéses versenyén már legalább $n + 1$ mérkőzést lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik legalább háromszor játszott.

20. Feladat. Rajzoljunk olyan 5 csúcsú gráfot amelynek

(a) 11 éle van,
(b) 3 éle van és összefüggő.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely gráf vagy a komplementere összefüggő.

22. Feladat. Egy ország bármely két városát összeköti vagy repülő, vagy hajójárat. Igazoljuk, hogy az ország minden városa bejárható csak egyfajta közlekedési eszközzel is.

23. Feladat. Melyik az a legkisebb $t(n)$ egész szám, amire igaz, hogy ha egy n csúcsú gráfban legalább $t(n)$ él van, akkor a gráf összefüggő?

24. Feladat. Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben az élek száma több, mint a csúcsok számának ötszöröse, de kevesebb, mint a hatszorosa?

25. Feladat. Egy fába 435 élt behúzva teljes gráfot kapunk.

(a) Hány csúcsa van ennek a gráfnak?
(b) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni az élek behúzásával kapott a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf még összefüggő legyen?
(c) Maximum hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráfban még legyen kör?
(d) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen, és legyen benne kör?

26. Feladat. Egy n csúcsú teljes gráf éleit A és B ? felváltva egy-egy élt ?kiszínezi pirosra. Az veszít, aki elsőként hoz létre piros színű kört. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha A kezdi a játékot?

Gráfok száma

27. Feladat. Miből van több, olyan 7 csúcsú gráfból, amelynek 10, vagy amelynek 11 éle van?

28. Feladat. Miből van több, olyan

(a) 7, (b) 8

csúcsú gráfból, amelyben minden pont foka 3, vagy amelyikben minden pont foka 4?

29. Feladat. Hány olyan 5 csúcsú gráf van, amelynek

(a) 10 éle van, (b) 9 éle van, (c) 8 éle van, (d) 7 éle van,

ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

30. Feladat. Hány olyan n ($n \in \mathbb{Z}^+$) csúcsú gráf van, amelynek

(a) 0, (b) 1, (c) 2

éle van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

31. Feladat. Hány n (számozott) csúcsú gráf van?

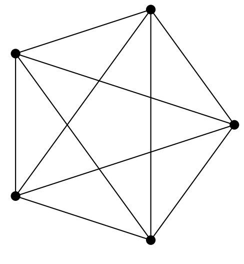
32. Feladat. Hány olyan n számozott csúcsú gráf van, amelynek pontosan n éle van?

33. Feladat. Hány szerkezeti izomerje van a C_4H_{10} molekulának? (Minden C csúcs negyedfokú, s minden H csúcs elsőfokú.)

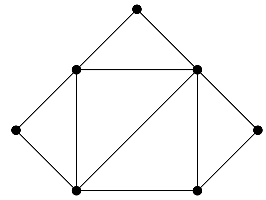
Euler-vonal

34. Feladat. Megrajzolhatók-e az alábbi gráfok „egyetlen vonallal”?

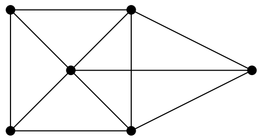
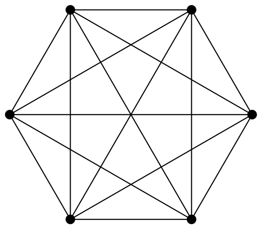
(a)



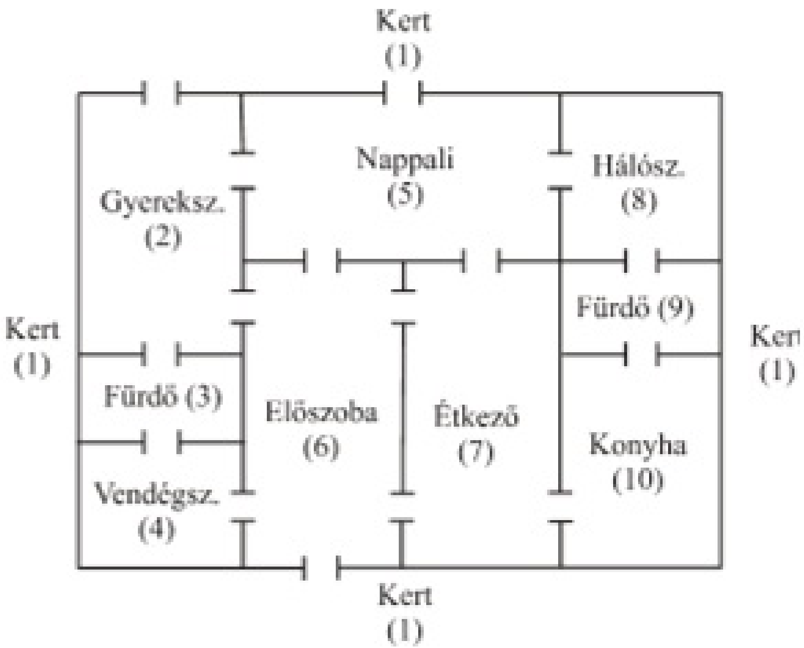
(b)



(c)

(d)  

35. Feladat. Kovács úr elégedetten nézegeti a tapétát a falon. Éppen most fejezte be szokásos ellenőrző körútját házában, mely során minden ajtón pontosan egyszer haladt át. Hol van most? (Kovács úr kertje körbeveszi a házat, s a kerten belül szabadon lehet mozogni, a kert bármely pontjáról bármelyikre el lehet jutni a házon kívül is.)



Hamilton-út, kör

36. Feladat. Tegyük fogyaszthatóvá a következő tételt: A teljes gráf éleinek irányításából keletkező gráfban mindig van irányított Hamilton-út. Például: Egy körmérkőzéses vívóverseny végén, szeretnénk a versenyzőket úgy sorba állítani, hogy mindenki mögött közvetlenül olyan álljon, akit ő legyőzött. Megtehető-e ez mindig?

37. Feladat. Van-e olyan 6 csúcsú egyszerű gráf amelynek

(a) 11
(b) 12 éle van, és nincs Hamilton-köre?

Használjuk: ha egy n pontú gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.

Vegyes gráfelméleti feladatok

38. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely 6 tagú társaságban van 3 ember akik páronként ismerik, vagy páronként nem ismerik egymást.

39. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcs gráf minden élét vagy pirosra, vagy kékre színeztük, akkor van egyszínű háromszög.

40. Feladat. Adott a síkon 6 általános helyzetű pont úgy, hogy bármely két pont távolsága különböző. Mutassuk meg, hogy megadható két olyan háromszög, amelyeknek minden csúcsa ezen pontok közül való, és a két háromszögnek van egy közös oldala, amely az egyik háromszögben a legrövidebb, a másikban a leghosszabb oldal. (KöMaL B5011)

41. Feladat. Egy társaságban öt házaspár van jelen. Azok, akik nem ismerik egymást, bemutatkozásul kezet fognak egymással. Az egyikük, Kovács úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné?

42. Feladat. Egy 17 csúcsú gráf minden élét egyszínűre, vagy kékre, vagy pirosra, vagy sárgára festettük. Igazoljuk, hogy van a gráfban egyszínű háromszög.

43. Feladat. Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja legalább hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse. Általánosítsunk.

44. Feladat. Tegyük fogyaszthatóvá a következő tételt (Turán Pál): Ha egy $2n$ csúcsú egyszerű gráfnak legalább n^2+1 éle van, akkor van benne háromszög. Például: Egy tízcsapatos futballtornán 26 mérkőzés zajlott le eddig. Igazoljuk, hogy van három csapat, melyek közül bármely kettő játszott mát egymással. (A tétel állítása éles, vagyis megadható olyan $2n$ pontú egyszerű gráf, amelynek n^2 éle van, és nincs benne háromszög.)

45. Feladat. Tegyük fogyaszthatóvá a következő tételt: Ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak $(n \geq 3)$, legalább $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+1=\dfrac{n^2-3n}{2}+2$ éle van, akkor a gráf összefüggő. Például: Egy megye 32 települése között 466 út van. (Bármely út pontosan két települést köt össze, és bármely két település között legfeljebb egy út halad.) Igazoljuk, hogy bármely településtől bármelyikre el tudunk jutni, az utakat felhasználva. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)

46. Feladat. Egy 111 tagú társaságban mindenki legfeljebb tíz embert ismer. Mutassuk meg, hogy van a társaságban 11 ember, akik közül senki nem ismeri a másik tízet. Éles-e a fenti állítás, azaz: Igaz-e ez minden 110 tagú társaságban is, ha mindenki legfeljebb tíz embert ismer? Van-e mindig 12 ilyen ember is? Igaz-e ez minden 110 tagú társaságban is, ha mindenki legfeljebb tíz embert ismer? Van-e mindig 12 ilyen ember is? Általánosítsunk.

47. Feladat. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb 6n ajándéktárgyat adtak át. (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából 1985/1986 11 - 12. évfolyam 1. kategória 2. forduló 3. feladat)

48. Feladat. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Minden év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai többsége másszínű házban lakik, mint ő. Bizonyítsuk be, hogy néhány év után már senki nem festi át házikóját. (A barátságok kölcsönösek és az évek során nem változnak.) (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny haladók döntő (tagozatosok) 1990.)

49. Feladat. Három iskola mindegyikébe n tanuló jár. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindhárman ismerik egymást. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.) (Kürschák József matematikai tanulóverseny 1977.)

50. Feladat. Egy társaságban mindenkinek van legalább két ismerőse (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy van a társaságban legalább három ember, akik leültethetők egy asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

51. Feladat. Egy $4n+2$ résztvevős bajnokságban eddig $2n$ számú fordulót rendeztek: mindegyik csapat $2n$ másikkal játszott. Igazoljuk, hogy van 3 olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzés sem volt.

52. Feladat. Egy társaságban mindenkinek van ismerőse, és tudjuk, hogy ha két embernek azonos számú ismerőse van, akkor nincs közös ismerősük. Igazoljuk, hogy van, aki csak egy embert ismer.

53. Feladat. Egy kilenc tagú társaságban bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást. Igazoljuk, hogy ekkor van négy olyan ember a társaságban, akik páronként ismerik egymást.