Elemi matematika 4. - MTN621g
KOMBINATORIKUS GEOMETRIA

1. Feladat. Happy End probléma: Igazoljuk, hogy ha adott a síkon 5 általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen) akkor kiválasztható közülük négy úgy, hogy azok egy konvex négyszög csúcsi legyenek. A megoldás során adjunk meg 5 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 kiválasztása jó legyen, és adjunk meg 5 pontot úgy is, hogy csak egyféleképp lehessen négy pontot kiválasztani a feladat feltételeinek megfelelően. (Általánosítás: Sejtés: $2^{m-2}+1$ általános helyzetű pont közül mindig kiválaszthatók egy konvex m-szög csúcsai.)

2. Feladat. Miért az előző feladat az első ebben a témakörben?

3. Feladat. Adott a síkon 5 általános helyzetű (semelyik három nincs egy egyenesen) pont. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük 3, melyek egy tompaszögű háromszög csúcsai.

4. Feladat. Adott a síkon 100 pont, melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 20 konvex négyszög úgy, hogy a 80 csúcspont az adott pontok közül való és a négyszögek páronként diszjunktak (közös pont nélküliek)!

5. Feladat. Általánosítsuk az előző állítást.

6. Feladat. Adott a síkon $n \geq 5$ általános helyzetű pont. Igazoljuk, hogy legalább $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ olyan konvex négyszög van, melynek csúcsai a fenti pontok közül valók.

7. Feladat. Egy konvex $ABCD$ négyszög minden oldalának hossza kisebb, mint 24 egység. Legyen P a négyszög valamely belső pontja. Igazoljuk, hogy a négyszögnek van olyan csúcsa, amelynek P-től vett távolsága kisebb, mint 17 egység.

8. Feladat. Hány általános helyzetű egyenest vettünk fel a síkon, ha összesen

(a) 3 (b) 10 (c) 91

metszéspontjuk van? Egyeneseket általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos (vagy esik egybe), illetve semelyik három nem megy át egy ponton.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott a síkon 2000 pont, akkor van olyan egyenes, amely mindkét oldalán pontosan 1000 pont van (az egyenesre tehát egyetlen pont sem illeszkedik a fentiek közül). Általánosítsunk.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha adott a síkon végtelen sok pont, akkor köztük szükségképpen végtelen sok távolság lép fel.

11. Feladat. Adott a síkon 2018 pont. Igazoljuk, hogy van olyan kör, amelynek belsejében 1009 pont van.

12. Feladat. Általánosítsuk az előző állítást.

13. Feladat. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy van a négyzetrácson olyan körlemez, amely pontosan n darab rácspontot fed le!

14. Feladat. Adott a síkon 1000 pont. Igazoljuk, hogy a sík bármely egységsugarú körén van olyan M pont, hogy M-nek az adott pontoktól vett távolságainak összege legalább 1000.

15. Feladat. Egy R sugarú asztalra r sugarú érméket teszünk, melyek nem fedik egymást. Már letettünk n érmét, s többnek már nincs hely. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{\frac{R}{r}-1}{2}\right)^2 < n < \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

16. Feladat. Adott a síkon n darab pont, amelyek között nincs három, amely egy egyenesre esne, és nincs négy, amely egy körön lenne. Minden ponthármas köré kört írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma legföljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

17. Feladat. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú sokszög oldalegyenesei?

18. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy t területű és k kerületű konvex sokszögben el lehet helyezni egy $\frac{t}{k}$ sugarú kört.

19. Feladat. Adott a síkon n általános helyzetű pont úgy, hogy bármely három által kifeszített háromszög területe legfeljebb 1. Igazoljuk, hogy a pontok lefedhetők egy olyan háromszöggel melynek területe 4.

20. Feladat. Egységnyi oldalú négyzetbe néhány kört írtunk, melyek kerületének összege legalább 10. Igazoljuk, van olyan egyenes, amelyik legalább 4 kört metsz. Igazoljuk, hogy ezek között olyan egyenes is található, amely a négyzet valamely oldalával párhuzamos.

21. Feladat. A síkon felveszünk néhány egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy bármely két szomszédos tartomány különböző színű legyen. (Két tartomány szomszédos, ha van közös határoló szakaszuk, félegyenesük vagy egyenesük.)

22. Feladat. Az e és f párhuzamos egyeneseken kijelöltünk n illetve k $(n, k, \geq 2)$ pontot. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a kijelöltek közül valók?

23. Feladat. Milyen n-re létezik a síkon olyan n szakaszból álló zárt töröttvonal, amelyben bármely két szomszédos szakasz merőleges egymásra, és a szakaszok hossza rendre $1, 2, \ldots n$?

24. Feladat. Egy 7×7-es négyzetrács minden kis négyzetét kiszíneztük két szín valamelyikével. Igazoljuk, hogy van legalább 21 olyan téglalap, melynek oldalai párhuzamosak a rácsegyeneseinkkel, és amelynek csúcsai azonos színű kis négyzetek középpontjai.

25. Feladat. A négyzetrácson a rácsegyenesekkel párhuzamosan elhelyezkedő módon felvettünk egy 1997×1998-as téglalapot, melynek csúcsai is rácspontok. Hány egységnégyzetet vág át az átlója?

26. Feladat. Hány olyan háromszög van, amelynek oldalai n-nél nagyobb, de $2n$-nél nem nagyobb egész számok? Ezek közül a háromszögek közül hány egyenlőszárú és hány egyenlőoldalú van? (NMMV 1992.10.2.)

27. Feladat. Lefedhető-e a sík véges sok sávval? (Egy sávot két párhuzamos egyenes határol.)