Elemi matematika 4. - MTN621g

Összeszámlálások

Bevezető feladatok A következő feladatok jelentős része egyszerű, „példatárszagú”, ám a részfeladatok között akadhatnak kifejezetten nehezek is, melyek megoldása alig képzelhető el a megelőző részfeladatok megoldása nélkül. A bevezető feladatokat nem tárgyaljuk részletesen a kurzuson, viszont a megoldásukhoz szükséges módszerek, rutinok, trükkök, eljárások, technikák ismerete elengedhetetlen a tárgyalt feladatok megoldásához, ezért a feladatok házi feladatként történő megoldása ajánlott.

Permutációk, variációk

1. Feladat. Hányféleképp állíthatja sorba Hófehérke a hét törpét, ha

(a) nem szabunk semmilyen feltételt,
(b) Szundi áll középen,
(c) Morgó a sor szélén áll,
(d) Morgó és Hapci áll a sor két szélén,
(e) Kuka és Hapci nem szomszédos,
(f) Szende közvetlenül Tudor és Vidor között áll,
(g) ábécérendben állnak,
(h) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi szomszédosak,
(i) Morgó a sor szélén áll vagy Szende és Szundi szomszédosak,
(j) vagy Morgó áll a sor szélén, vagy Szende és Szundi szomszédosak,
(k) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi nem szomszédosak.

2. Feladat. Hányféleképp ülhet le Artúr király és a hét lovagja a kerekasztal mellé, ha

(a) nincs semmilyen extra feltétel,
(b) Galahad nem szeretne Parszifal mellé ülni.

Két ültetést akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy valaki, akinek a két ültetésben legalább az egyik szomszédja különbözik.

3. Feladat. A hét törpét meglátogatja a hét lovag. Hófehérke leülteti őket egy egyenes asztal ugyanazon oldalára. Hányféleképp teheti ezt meg úgy, hogy

(a) törpe mellett vezér, vezér mellett törpe üljön felváltva,
(b) a törpék ülnek az első hét helyen,
(c) a lovagok mindannyian szomszédosak?

4. Feladat. Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyek mindegyikének felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, mely

(a) páros,
(b) öttel osztható,
(c) tízzel osztható,
(d) hárommal osztható,
(e) hattal osztható,
(f) 20 000-nél nagyobb páratlan szám,
(g) 20 000-nél kisebb, vagy öttel osztható,
(h) négyzetszám.

5. Feladat. A $0, 1, 2, 3, 4$ számjegyek felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, ami

(a) nincs semmilyen feltétel hatálya alatt,
(b) páros,
(c) öttel osztható,
(d) tízzel osztható,
(e) hárommal osztható,
(f) hattal osztható?

6. Feladat. Hány olyan sorrendje (permutációja) van az $1, 2, 3, 4, 5$ elemeknek, amelyben az eredeti, 12345 sorrendhez képest

(a) az 1, 2 elemek helyet cseréltek,
(b) az 1 fixen maradt,
(c) az 1 és 2 is fixen maradt,
(d) az 1 fixen maradt, de a 2 nem,
(e) az 1 vagy a 2 fixen maradt,
(f) pontosan 2 elem maradt fixen,
(g) pontosan 3 elem maradt fixen,
(h) pontosan 4 elem maradt fixen?

7. Feladat. Hány sorrendje van a MATEMATIKA szó betűinek, amelyben

(a) nem szabunk extra feltételt,
(b) M az első betű,
(c) A az utolsó betű,
(d) a három A nem szomszédos,
(e) M az első betű és a három A szomszédos
(f) a magánhangzók elől állnak.

8. Feladat. Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(d) a szám öttel osztható,
(e) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,
(g) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,
(h) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,
(i) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,
(j) a szám páratlan,
(k) a szám csak páros számjegyekből állhat,
(l) a szám páros,
(m) a számban a számjegyek szorzata páros,
(n) a számban a számjegyek összege páros.

9. Feladat. Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,
(e) a szám öttel osztható,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(g) a szám páratlan,
(h) a számban nagyobb, mint 34220.

10. Feladat. Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobva tíz hosszúságú fej-írás sorozatot kapunk. Hány különböző sorozat van? Hány olyan sorozat van,

(a) amely írással kezdődik,
(b) amely írással kezdődik, és fejjel végződik,

(c) amelyben a fejek és írások felváltva követik egymást,
(d) amelyben ugyanannyi írás van, mint fej,
(e) amelyben több írás van, mint fej,
(f) amelyben a fejek és írások száma is páros,
(g) amelyben a fejek és írások száma is prímszám,
(h) amely palindrom (tehát visszafele olvasva is ugyanaz),
(i) amelyben nincs két írás amely szomszédos lenne.?

11. Feladat. Egy szabályos dobókockát ötször feldobva, a dobások eredményét egymás mellé leírva ötjegyű pozitív egész számokat kaptunk. Ezek között hány olyan van,

(a) amelyre vonatkozóan nem szabunk feltételt,
(b) amelyben van ismétlődő számjegy,
(c) amely öttel osztható,
(d) amely 30000-nél kisebb,
(e) amely 34000-nél nagyobb,
(f) amelyben nem szerepel prím számjegy,
(g) amelyben a számjegyek szorzata prím,
(h) amelyben a számjegyek szorzata 3600-zal osztható,
(i) amelyben az első két számjegy nem 6-os, de a harmadik igen,
(j) amely palindrom, tehát visszafele olvasva is ugyanaz,
(k) egy egész szám tizedik hatványa?

12. Feladat. Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) van olyan számjegy, amely legalább kétszer szerepel
(c) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(d) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(e) a szám öttel osztható,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(g) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,
(h) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,
(i) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,
(j) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,
(k) a szám páratlan,
(l) a szám csak páros számjegyekből állhat,
(m) a szám páros,
(n) a számban a számjegyek szorzata páros,
(o) a számban a számjegyek összege páros.

13. Feladat. Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,
(e) a szám öttel osztható,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(g) a szám páratlan,

(h) a szám nagyobb, mint 34220.

14. Feladat. Hány

(a) 4 (b) 6 (c) n $(n \in \mathbb{Z}^+)$

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) k-as $(k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2)$

alapú számrendszerben?

15. Feladat. Hány legfeljebb

(a) 4 (b) 6 (c) n $(n \in \mathbb{Z}^+)$

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) k-as $(k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2)$

alapú számrendszerben?

16. Feladat. Hányféle nyolcjegyű pozitív egész szám képezhető csak a 2 és 7 számjegyek felhasználásával, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,
(b) a számnak mindkét számjegyet tartalmaznia kell legalább egyszer,
(c) a számnak 9-cel oszthatónak kell lennie,
(d) a számnak 18-cal oszthatónak kell lennie,
(e) a számnak 36-tal oszthatónak kell lennie.

Kombinációk

17. Feladat. Egy 32 lapos magyar kártya csomagból kiválasztunk egyszerre, visszatevés nélkül 8 lapot. (A magyar kártyában 4 szín van, mindegyikből 8-8 lap. Ezek: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász.) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kiválasztott lapok között

(a) ne legyen ász,
(b) ott legyen a piros hetes,
(c) csak zöld legyen,
(d) csak ász és hetes legyen,
(e) csak ász és zöld legyen,
(f) csak zöld és makk legyen, de legyen mindkét színből legalább egy,
(g) pontosan két színből valók legyenek,
(h) csak figura legyen,
(i) legalább három figura legyen,
(j) több makk legyen, mint tök.

18. Feladat. Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szigorú monoton

(a) növekvő (b) csökkenő

sorrendben követik egymást?

19. Feladat. Egy 32 fős osztály, melybe 14 lány és 18 fiú jár választ egy bizottsági elnököt és 5 (egyenrangú) bizottsági tagot. (Az elnök nem lehet tag is.) Hányféleképp tehetik ezt meg, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,
(b) az elnöknek lánynak kell lennie,
(c) a tagok csak fiúk lehetnek,
(d) a bizottság nem állhat csupa azonos nemű személyből,
(e) a tagok többségének az elnökkel ellenkező neműnek kell lennie.

20. Feladat. Tekintsünk egy egységkockákból álló $n \times m \times k$-s téglatestet. Hány téglatestet határoznak meg a benne lévő egységkockák?

21. Feladat. Egy egységkockákból álló kocka egységkockái összesen 91 125 téglatestet határoznak meg. Hány egység magas a kocka?

22. Feladat. Egy egységkockákból álló négyzetes oszlop egységkockái összesen 20 250 téglatestet határoznak meg. Határozzuk meg a négyzetes oszlop méreteit.

23. Feladat. Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson valamelyik kocsira, azzal nem törődik, hogy a társai melyik kocsiba szálltak.

(a) Hányféleképp lehetséges az, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3-3 tagja szállt?
(b) Hányféleképp lehetséges az, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe nem szállt fel senki a társaság tagjai közül?
(c) Hányféleképp lehetséges az, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel a társaság tagjai közül?

(KöMaL Emelt szintű érettségi feladat alapján)

Itt érnek véget a Bevezető feladatok, mivel az ismétléses kombinációk már nem képezik a középiskolai tananyag részét.

Ismétléses kombinációk

24. Feladat. Eszter 5 féle növény (petúnia, muskátli, rózsa, szarkaláb és levendula) közül választva 12 palántát rendel magának. Hányféleképp teheti ezt meg, ha csak az számít, melyik növényből rendelt egyáltalán, és mennyit.

25. Feladat. Zsuzsi Párizsban 18 képeslapot vásárolt, melyeket 8 féle lapból választhatott ki.

(a) Hányféleképpen tehette ezt meg?
(b) Hányféleképpen tehette ezt meg, ha minden fajtából vett legalább egyet?

26. Feladat. Hány megoldása van az $x + y + z = 9$ egyenletnek a

(a) természetes számok,
(b) pozitív egészek,
(c) egész számok körében?

Összeszámlálási feladatok

27. Feladat. Hányféleképp lehet kiosztani 15 tanuló között 5 tárgyat, ha azok egyformák/különbözőek, ha egy tanuló legfeljebb egy/több tárgyat is kaphat? (Mind a négy esetben oldjuk meg a problémát.)

28. Feladat. Hányféle 3 gombócos

(a) tölcsér
(b) kehely állítható össze 5 féle fagylaltból?

29. Feladat. Egy ládából melyben elegendően sok piros, sárga és kék golyó van kihúzunk 5-öt a sörrendre való tekintet nélkül. Hány eredménye lehet a húzásnak?

30. Feladat. Hányféleképp dobhat be egy postás (a sorrend nem számít) 5 levelet 16 levesládába ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) egy ládába legfeljebb egy levél kerülhet?

31. Feladat. Hányféleképp lehet elhelyezni 14 egyforma golyót 5 számozott (tehát egymástól megkülönböztetett) dobozba, hogy

(a) pontosan 2
(b) legfeljebb 2
(c) legalább 3 üresen maradjon?

32. Feladat. Hányféleképp osztható szét 6 piros, 7 fehér és 8 zöld golyó

(a) két
(b) három gyerek között?

33. Feladat. Egy 15 fős csoport kirándulni megy, szállásuk egy 6 fős, egy 2 fős, és egy 7 fős szobába van. Hányféleképp helyezkedhetek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe, és

(a) nem szabunk feltételt,
(b) Anna és Bea nem akarnak egy szobában lenni?

34. Feladat. Egy osztályban 15 fiú és 15 lány kettesével sorbaáll, fiú-lány párokat képezve. Hányféleképp tehetik ezt meg?

35. Feladat. Hányféle sorrendben vezethet be a porondmester a színpadra 5 oroszlánt és

(a) 4
(b) 5
(c) 6
(d) 7 tigrist,

ha két tigris nem mehet közvetlenül egymás mellett? Oldjuk meg a feladatot ha az azonos fajú állatokat

(i) megkülönböztetjük,
(ii) nem tudjuk megkülönböztetni egymástól.

36. Feladat. Hány

(a) hatjegyű, (b) hétjegyű

tükörszám (palindrom szám) van a tízes számrendszerben? És a négyesben?

37. Feladat. Egy mozi utolsó sorában 14 szék van. Mennyi lehet a legtöbb szék amin néző ül, ha ebben a sorban minden szék mellett van üres szék? (Zrínyi Ilona Matematikaverseny, megyei forduló, 2014. 3. osztály, 23. feladat /Válaszlehetőségek: 5, 6, 7, 8, 9./)

38. Feladat. Egy 8×8-as sakktáblán 8 bástya hányféleképp helyezhető el, hogy egyik se üsse a másikat?

39. Feladat. Hányféleképp számozhatók meg egy kocka lapjai az $1-6$ számokkal, minden lapra egy számot írva, és minden számot pontosan egyszer felhasználva, ha két számozást akkor tekintünk különbözőnek, ha semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba?

40. Feladat. Adott az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ elemek egy permutációja. A permutációt nem ismerjük, de tudjuk, hogy az 58132476 permutációban 5, a 75438621 permutációban pedig 4 elem helyét találtuk el. Mi a keresett permutáció?

41. Feladat. Hány 3-mal osztható 16-ra végződő ötjegyű szám van?

42. Feladat. Hány olyan ötjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege 0-ra végződik?

43. Feladat. Hányféleképp bontható fel az n pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít?

44. Feladat. Hányféleképp lehetséges az, ami megtörtént az 1987. évi 34. heti lottóhúzáson, mikor is kihúztak két szomszédos számpárt, de nem húztak ki három egymás utáni számot?

45. Feladat. Hányféleképp lehet n embert körökbe állítani? (Egy ember is kör, illetve két elhelyezkedés akkor azonos, ha mindenkinek ugyanaz pl. a bal szomszédja.)

46. Feladat. A kilenc pozitív számjegyet egymás után, mindegyiket pontosan egyszer leírva, hányféleképp kaphatunk 11-gyel osztható számot?

47. Feladat. Leírtuk a pozitív egész számokat egymás mellé 1-től 2019-ig.

(a) Hány számjegyet írtunk le?
(b) Hányszor írtuk le az egyes számjegyeket?
(c) Melyik a 2019. számjegye a leírt számnak?

48. Feladat. Az $\{1, 2, \ldots, 6\}$ elemek permutáció közül hány olyan van, amely két ciklusból áll?

49. Feladat. A dominón 0-tól 9-ig lehetnek pöttyök. Egy dominókészletben minden lehetséges páros előfordul, pontosan egyszer. Hány darabból áll a készlet?

50. Feladat. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak, amely nem tartalmaz három szomszédos számot? Válaszoljuk meg a kérdést az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} halmazok esetén is.

51. Feladat. Hányféleképp lehetséges az, ami megtörtént az 1969. február 28.-i lottóhúzáson, mikor is a kihúzott számokat emelkedő számsorrendbe állítva, az első két szám összege egyenlő volt a harmadikkal?

52. Feladat. Lottózók gyakran panaszolják, hogy már megint nem nyertek, ráadásul – ami külön bosszúság – megjátszott számaik mellett lévő számokat húztak ki. Vizsgáljuk higgadtan a kérdést: tényleg olyan közel jártak a főnyereményhez? Tegyük fel, hogy az ötös lottón a nyertes számok: 7, 13, 28, 46, 75. A lottószelvénynek hány olyan különböző kitöltése lehetséges, amelyek mindegyikében a megjelölt számok közül legalább négy a felsorolt számokkal szomszédos? (Két szám szomszédos, ha különbségük abszolút értéke 1.) (A lottóhúzásra „panaszkodók” esetében persze az a valószínű, hogy kitöltésükben a nyertes számok nem szerepeltek, tehát a „maradék” nem 80, csak 75 szám, illetve kissé módosulna a feladat, ha az 1 vagy a 90 szerepelne a kihúzott számok között, hiszen ezeknek csak egy szomszédjuk van.)

53. Feladat. Egy n lakosú városban klubokat szerveznek úgy, hogy bármely két klubnak legyen, és bármely három klubnak már ne legyen közös tagja. Legfeljebb hány klubot lehet így szervezni?

54. Feladat. Egy sakkbajnokságon mindenki mindenkivel játszott. Győzelemért 1, döntetlenért 0,5, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén kiderült, hogy minden résztvevő pontszámának felét az utolsó három helyezett elleni játszmákban szerezte. Hány résztvevője volt a versenynek?

55. Feladat. Egy nemzetközi labdarúgó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat? (NMMV 2001. 9/6)

56. Feladat. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. (KöMaL F.2910)

57. Feladat. Négy testvérpár mindegyikében az egyik testvér fiú, a másik pedig leány. Három csoportba osztjuk őket úgy, hogy minden csoportban legalább ketten legyenek, de testvérek ne kerüljenek egy csoportba. Hányféleképpen történhet ez?

58. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy 1-től 1986-ig a természetes számok kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy ne forduljon elő olyan 18 tagú számtani sorozat, amelynek minden tagja ugyanolyan színű! (KöMaL F 2599.)

59. Feladat. Egy konvex n-szög csúcsai közül hányféleképp választható ki 3, hogy azok páronként nemszomszédosak legyenek?

60. Feladat. Hányféleképp helyezhető el m urnába n tárgy úgy, hogy egyetlen urna se maradjon üresen?

61. Feladat. Hány olyan 8 jegyű szám van, amely csak az 1, 2, 3, számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

62. Feladat. Hány olyan n-nél nem nagyobb pozitív egész van, amelynek nincs egyjegyű prímosztója?

63. Feladat. (Az elcserélt levelek problémája) Hányféleképp tud a szórakozott titkárnő n levelet elhelyezni n borítékba úgy, hogy egyetlen címzett se a saját levelét kapja?

Pascal-háromszög, binomiális együtthatók

64. Feladat. Igazoljuk a binomiális együtthatók következő tulajdonságait, összefüggéseit kombinatorikus úton.

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

(c) $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

(d) ha $2 \le k \le n$, akkor $\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k-2} + 2 \cdot \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

(e) ha $0 \le j \le k \le n$, akkor $\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}\binom{n+1-j}{k-i}$,

(f) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$,

(g) $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{k}{l}\binom{n}{k}$,

(h) $\binom{n}{k}\binom{k}{l}\binom{l}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{l-m}\binom{n-l}{k-l}$

(i) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

(j) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

(k) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

(l) $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$,

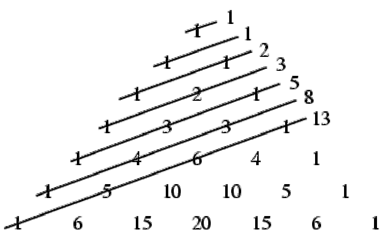
(m) $2^n \cdot \binom{n}{0} + 2^{n-1} \cdot \binom{n}{1} + 2^{n-2} \cdot \binom{n}{2} + \ldots + 2 \cdot \binom{n}{n-1} + 1 \cdot \binom{n}{n} = 3^n$,

(n) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 3^n$,

(o) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$,

(p) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

65. Feladat. Kicsit tüzetesebben vizsgálva a Pascal-háromszöget, észrevehetjük, hogy a Pascal-háromszög sorait megfelelő módon „ferdén” összegezve épp a megfelelő Fibonacci-számokat kapjuk.



Maga az észrevétel meglepő lehet, sőt formulába öntve a következő, nem túl barátságos feladatot kapjuk.

Igazoljuk, hogy

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k},$$

ahol f_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli.

Sem a kitűzés módja, sem az ebből valószínűsíthető megoldási módszerek nem adnak választ ezen meglepő összefüggés okára. Kissé távolabbról indulva azonban minden kérdést megválaszoló megoldást találhatunk. Oldjuk meg hát a következő feladatot (kétféle módon).

Egy ház minden emeletét kékre vagy fehérre szeretnénk festeni, de két szomszédos emelet nem lehet egyszerre kék. Hányféle színezés lehetséges egy n emeletes ház esetén?

66. Feladat. Hány olyan n hosszúságú fej-írás sorozat van, melyben két fej nem állhat egymás mellett?

67. Feladat. A Pascal háromszög k-adik sora csak páratlan számokat tartalmaz. Mit mondhatunk k-ról (KöMaL F.2597 (1986))?

68. Feladat. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaz választható ki úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös eleme?

69. Feladat. Milyen $n, k \in \mathbb{N}$ esetén lesz $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$ egy számtani sorozat három egymást követő tagja, ebben a sorrendben?

70. Feladat. Egy $3n+1$ tagú társaság bármely két tagja vagy teniszezik, vagy pingpongozik vagy sakkozik egymással. Mindenkinek n tenisz-, pingpong- illetve sakkpartnere van a fenteik közül. Igazoljuk, hogy van 3 ember akik egymás közt mindhárom játékot játsszák.

71. Feladat. Az alábbi táblázat a Pascal-háromszög mintájára készült. Az első sor két eleme 1 és 2, ezután pedig minden újabb szám a felette álló kettő összege.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 3 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 5 & & 2 \end{array}$$

(a) Mennyi a 100-adik sorban álló számok összege?
(b) Mit kapunk, ha a 100-adik sorban váltakozó előjellel adjuk össze a számokat?

72. Feladat. Igazoljuk, hogy $(5+\sqrt{26})^n$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni első n jegy ugyanaz. (Kürschák József Matematikai tanulóverseny 1966. 2. feladat) Általánosítsunk!

73. Feladat. Legyen az n pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ osztható 64-gyel. (KöMaL B3965.)

74. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$2^n \mid \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2}3 + \ldots + \binom{2n}{2i}3^i + \ldots + \binom{2n}{2n}3^n.$$

(KöMaL B3489.)

75. Feladat. Melyek azok a kétjegyű páros $\overline{ab}$ számok, amelyek ötödik hatványa $\overline{ab}$-re végződik?

76. Feladat. Mi lehet az utolsó két számjegye egy egész szám huszadik hatványának?

77. Feladat. Az a és b valós számokra teljesül a $2a + 3b = 12$ összefüggés. Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén $\left(\frac{a}{3}\right)^n + \left(\frac{a}{3}\right)^n \geq 2$.

78. Feladat. Igazoljuk, hogy az $x^7 - 14x^6 + 21x^5 - 70x^4 + 35x^3 - 42x^2 + 7x - 2 = 0$ egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 2 + \sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{9} + \ldots + \sqrt[7]{3^6}$. (KöMaL B 3861.)