**Elemi matematika 4. - MTN621g**

Skatulya-elv

Bevezető feladatok

A következő, „születési” feladatokban számoljunk 365 nappal, illetve 52 héttel egy évben.

**1. Feladat.** Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki a hét ugyanazon a napján született?

**2. Feladat.** Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki ugyanabban hónapban született?

**3. Feladat.** Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább $2, 3, \ldots, k$ ember aki az év ugyanazon napján született?

**4. Feladat.** Egy iskolának van 870 diákja, 92 tanára és 28 osztálya. Döntsük el, melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül. Vizsgáljuk a paraméterek megváltoztatásának hatását az állítások igazságértékére vonatkozóan.

(a) Van olyan osztály, amelyikbe legalább 30-an járnak.
(b) Van két diák, aki az év ugyanazon napján született.
(c) Van három diák, aki az év ugyanazon napján született.
(d) Van négy diák, aki az év ugyanazon napján született.
(e) Van nyolc tanár, aki ugyanabban a hónapban született.
(f) Van egy olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született mint valamelyik tanár.
(g) Van olyan osztály, amelyikben legalább öt tanár tanít.

**5. Feladat.** Egy dobozban lemezek vannak, egyen 1-es, kettőn 2-es, és így tovább, száz darabon 100-as van. Legalább hányat kell kivennünk, hogy biztosan legyen közöttük 10, amelyiken ugyanaz a szám van?

**6. Feladat.** Egy iskolának 750 tanulója van. Egy 100 pontos dolgozatot megírva, egyedül a legrosszabb tanuló ért el 69 pontot, a többiek ennél többet. Igazoljuk, hogy van legalább 25 tanuló ugyanolyan eredménnyel.

**7. Feladat.** Legalább hány tanulója van annak az iskolának, ahol tudjuk, hogy egy 100 pontos tesztet megírva a legrosszabb eredmény 75 pontos lett, és van legalább 30 diák, aki ugyanannyi pontot szerzett?

**8. Feladat.** Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék, tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén, akkor van három azonos színű, egyidős tehén ugyanabból a faluból.

**9. Feladat.** Egy tíztagú társaságban mindenki legalább hét másikat ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely három embernek van közös ismerőse. (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny haladók II. ford. (szki) 1986.)

**10. Feladat.** 17 tudós mindegyike levelezik a többivel angol, német vagy francia nyelven. Igazoljuk, hogy van három, akik egymást közt ugyanazt a nyelvet használják. ( VI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, Moszkva, 1964. alapján)

**11. Feladat.** Egy kiránduláson 60 gyerek vett részt, és tudjuk, hogy közülük bármely 10-et kiválasztva, lesz a kiválasztottak között legalább 3 tanuló, akik osztálytársak. (Minden diák egy osztályba jár, és minden osztályba jár legalább két tanuló.) Igaz-e, hogy szükségszerű, hogy a 60 gyerek között legyen

(a) 15
(b) 16 akik osztálytársak?

Oszthatóság, sorozatok

**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy 12 különböző kétjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége azonos számjegyekből áll.

**13. Feladat.** Adott nyolc háromjegyű szám, amelyeket kettesével egymás mellé írva hatjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon. Azt tapasztaljuk, hogy minden esetben találunk 7-tel osztható hatjegyű számot. Miért? (KöMaL K276.)

**14. Feladat.** Legfeljebb hány pozitív egész számot írhatunk fel egy táblára, ha azt akarjuk, hogy semelyik

(a) kettő összege
(b) különbsége
(c) sem összege sem különbsége ne legyen osztható 10-zel?

**15. Feladat.** Legyen adott $n$ darab természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy mindig kiválasztható közülük néhány (legalább egy) úgy, hogy azok összege osztható $n$-nel.

**16. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha $n$ és $k$ pozitív egészek, akkor $n + k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k + 1)$-et úgy, hogy az összegük $n$-nel osztható legyen. (KöMaL B. 4921.)

**17. Feladat.** Adott 20 darab különböző pozitív egész szám úgy, hogy egyik sem nagyobb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik között van négy egyenlő. (Mindig a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet.)

**18. Feladat.** Igazoljuk, hogy a 10-es számrendszerben felírt 16-jegyű pozitív egész számnak van néhány egymást követő számjegye, melyek szorzata négyzetszám. (Egytényezős szorzatot is megengedünk.)

**19. Feladat.** Megadható-e minden pozitív egész $n$-re $n$ darab pozitív egész szám úgy, hogy közülük néhányat összeadva sosem kapunk négyzetszámot?

**20. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha adott $n + 1$ különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész, akkor van közöttük három olyan szám, melyek közül valamely kettő összege a harmadik.

**21. Feladat.** Az első $4n$ pozitív egész számot osszuk tetszőlegesen $n$ halmazba. Igazoljuk, hogy mindig lesz olyan halmaz, amelyikben van három olyan szám, amelyek lehetnek egy háromszög oldalainak hosszúságai.

**22. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 0 és az 1 számjegyekből áll.

**23. Feladat.** Igazoljuk, hogy az 2019-nek van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 1 számjegyből áll.

**24. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $\overline{ab}, \overline{aab}, \overline{aaab}, \ldots$ sorozatban, ahol $a$ és $b$ 0-tól különböző számjegyek, végtelen sok összetett szám van.

**25. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész $n$-re létezik olyan Fibonacci-szám, amely $n$ darab 0-ra végződik.

**26. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$ és $(m; n) = 1$, akkor van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $n | m^k - 1$.

**27. Feladat.** Igazoljuk, hogy a 3-nak van olyan pozitív egész kitevős hatványa, melynek a 2011-gyel vett osztási maradéka 1.

**28. Feladat.** Léteznek-e olyan $n$ és $m$ pozitív egész számok, amelyekre $10^{200} \mid 7^n - 3^m$?

**29. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden pozitív egész $k$-nak van olyan többszöröse az $[1; k^4]$ intervallumban, amelynek tízes számrendszerbeli alakja legfeljebb négy különböző számjegyet tartalmaz.

**30. Feladat.** 100 kavicsot 50 kupacba rendezünk úgy, hogy egyik kupac sem üres. Igazoljuk, hogy a kupacok két csoportba tolhatók úgy, hogy a két csoportban 50-50 kavics van. (KöMaL Gy.2304.)

**31. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy bármely $n+2$ darab egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek négyzetének különbsége osztható $2n + 1$-gyel. (NMMV 2007. 11/3)

**32. Feladat.** Az $1, 2, \ldots 100$ számok közül 27-et kiválasztva igazoljuk, hogy van a kiválasztottak között kettő, melyek nem relatív prímek.

**33. Feladat.** Az első 25 pozitív egész szám közül kiválasztunk 17 darabot. Igazoljuk, hogy a kiválasztott számok között biztosan lesz két olyan, amelyek szorzata négyzetszám. (NMMV 2007. 9/6)

**34. Feladat.** Adottak az $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható $n$-nel, akkor $n$ és $d$ nem relatív prímek! (NMMV 1998. 11/3)

**35. Feladat.** Egy tanuló 20 héten keresztül feladatokat old meg, mindennap legalább egyet, de hetente legfeljebb 13-at. Igazoljuk, hogy kiválasztható néhány egymást követő nap úgy, hogy azokon összesen pontosan 19 feladatot old meg. (KöMaL N.21)

**36. Feladat.** Van-e 12 olyan mértani sorozat, amelyek tartalmazzák az első 100 pozitív egész számot?

**37. Feladat.** Hívjunk egy pozitív egészet tarkának, ha bármilyen $m$ pozitív egésszel szorozzuk is meg, a szorzat mind a 10 számjegyet tartalmazza. Hívjuk $n$-tarkának, ha ez a tulajdonság az $1 \leq m \leq n$ egészekre teljesül. a) Mutassuk meg, hogy tarka szám nincs. b) Van-e 1995-tarka szám? (KöMaL N.74)

**38. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden valós számokból álló számsorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

## Táblázatok, téglalapok

**39. Feladat.** Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen? (Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1995. 10. osztály 1. feladat)

**40. Feladat.** Egy $5 \times 9$-es téglalapot feldaraboltunk 10 olyan téglalapra, melyek oldalai egész hosszúságúak. Igazoljuk, hogy van közöttük két egybevágó.

**41. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy sakktáblára fölállítunk 42 bábut, akkor lesz olyan $4 \times 4$-es résztábla, amelynek átlós mezőin legalább 4 bábu áll. (Arany Dániel Matematika Tanulóverseny, kezdők, II. ford. 1984.)

**42. Feladat.** Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki a 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 1001-et, biztosan lesz a kiválasztottak között két olyan szám, amelyek különbsége 4. (NMMV 2000. 9/3)

**43. Feladat.** Egy négyzet alakú 100-szor 100-as táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írunk. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőbe írt szám különbsége legfeljebb 10. Bizonyítsuk be, hogy van 6 olyan mező a táblázatban, amelyekbe azonos számokat írtunk. (NMMV 2002. 10/6)

**44. Feladat.** Az $_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok. Igazoljuk, hogy létezik olyan $x$ valós szám, amelyre a fenti $x + a_i$ számok mindegyike irracionális.

Geometriai feladatok

**45. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely véges, egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

**46. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van két, azonos oldalszámú lapja.

**47. Feladat.** Igazoljuk, hogy a sakktáblára 31 bábut állítva lesz olyan  alakú rész, ahol nem áll bábu.

**48. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha adott a koordinátasíkon 5 rácspont, akkor van közöttük kettő, melyeket összekötő szakasz a belsejében is tartalmaz rácspontot. (KöMaL P.53)

**49. Feladat.** Adott egy négyzet, melynek átlója 2 egység. Melyik az a legkisebb $d$ szám, amelyre igaz, hogy a négyzetben öt pontot felvéve mindig lesz kettő, melyek távolsága nem nagyobb mint $d$?

**50. Feladat.** Egy egységkocka minden pontját három szín valamelyikével színezzük. Igazoljuk, hogy mindig van két azonos színű pont, melyek távolsága legalább 1,4.

**51. Feladat.** A sík pontjait 2011 színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy minden $n$-re ($n \geq 3$) található végtelen sok olyan konvex $n$-szög, amelyeknek a csúcsai azonos színűek!

**52. Feladat.** Egységsugarú körlapon hét pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van két pont, melyek távolsága nem nagyobb mint 1.

**53. Feladat.** A sík pontjait három színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy van két azonos színű pont, melyek egységnyi távolságra vannak egymástól.

**54. Feladat.** A sík pontjait véges sok színnel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan téglalap, amelynek a csúcsai azonos színűek.

**55. Feladat.** Egy $3 \times 6$ cm-es téglalapban elhelyeztünk nyolc pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között található két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{5}$ cm-nél! (Szőkefalvi)

**56. Feladat.** Egységnyi oldalhosszú négyzetben 51 pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van a pontok között három, melyek lefedhetők egy a) $1/5$ oldalú négyzettel, b) $1/7$ sugarú körlappal.

**57. Feladat.** Egy $5 \times 5 \times 10$-es téglatestben adott 2001 pont. Igazoljuk, hogy van kettő, melyek távolsága kisebb, mint 0,7.

**58. Feladat.** Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal. (NMMV 1999. 9/5)

**59. Feladat.** A Hupikék Törpikék $1001\times945$ méteres erdejében 1280 darab 1 méter átmérőjű fenyőfa él. A törpök szeretnének 7 darab $20 \times 34$ méteres teniszpályát kijelölni az erdőben. Lehetséges-e ez anélkül, hogy egyetlen fenyőt is ki kellene vágniuk? (KöMaL B.3622 )

**60. Feladat.** Mutassuk meg, hogy bármely 13 különböző valós szám között található két olyan: $x$ és $y$, hogy $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$. (Használjuk, hogy $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.)

**61. Feladat.** Egy egységsugarú gömbben 9 légy röpköd. Igazoljuk, hogy van közöttük kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{3}$.

**62. Feladat.** Adott a síkon 1997 darab pont úgy, hogy semelyik három sincs rajta ugyanazon az egyenesen és bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb 1 területegység. Mutassuk meg, hogy létezik olyan egységnyi területű háromszöglap, amellyel a pontok közül legalább 500-at le lehet fedni.

**63. Feladat.** Egy egységnyi területű négyzetben adott 101 pont úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy az általuk meghatározott háromszögek között van olyan, amelyiknek a területe legfeljebb 0,01. területegység.

**64. Feladat.** Igazoljuk, hogy van a $\pi$-nek olyan pozitív egész számú többszöröse, amely egy egész számtól legfeljebb $0,000001$-gyel tér el.

**65. Feladat.** Igazoljuk, hogy a $|\sin n|$ alakú számok halmazának ($n$ nem negatív egész) van legalább két olyan eleme, amelyek kisebbek $\frac{1}{1000}$-nél! (NMMV 1997. 11/6)

**66. Feladat.** Igaz-e, hogy minden irracionális számnak van olyan nemnulla egész számú többszöröse, amelynek tizedes jegyei között végtelen sokszor szerepel a 0 és 9 számjegyek egyike? (KöMaL N.83)

**67. Feladat.** Melyik az a legkisebb $k$ természetes szám, amelyre igaz a következő állítás? „Ha egy tetraéder élszögei között van $k$ darab $60°$-os, akkor a tetraéder csak szabályos lehet." (KöMaL Gy.3245)