

Elemi matematika 3. - MTN424g

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

A korábbi fejezetekben már talákoztunk geometriai egyenlőtlenségekkel, és szélsőérték feladatokkal:

SZÁMTANI-MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG KÉT TAGRA:

1. Feladat. 200 méter hosszú kerítéssel szeretnénk egy épület fala mentén három oldalról körbekeríteni egy téglalap alakú részt. Mekkora a válasszuk az oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?

2. Feladat. Határozzuk meg adott kerületű téglalapok közül a maximális területűt, illetve adott területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

3. Feladat. Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

4. Feladat. Adott felszínű téglalaprak közül melyik testátlója minimális?

5. Feladat. Egy téglalaprak egyik lapjának területe 1 dm^2 , az élek hosszának összege 20 dm . Mekkora ezen téglalaprak felszínének maximuma?

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a = \sqrt{bc}$, akkor $\alpha \leq 60^\circ$.

7. Feladat. Egy háromszögbe négyzetet írunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van. Igazoljuk, hogy a négyzet területe legfeljebb a háromszög területének fele.

8. Feladat. Mekkora a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

9. Feladat. Egy háromszög egyik oldala 1 , másik két oldala hosszának összege állandó. Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt köre területe szorzatának legnagyobb értékét!

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogójának a hossza, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab(a + b + c)} \geq \sqrt{2}.$$

11. Feladat. Egy trapéz egyik alapja 12 cm , a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm . Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

12. Feladat. Egy körcikk területe 16 . Mekkora a sugara, ha kerülete minimális?

13. Feladat. Adott kerületű negyed-körgyűrűcikk közül melyiknek a területe maximális?

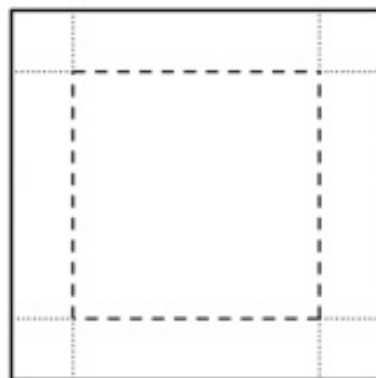
SZÁMTANI-MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG n TAGRA:

14. Feladat. Írjunk adott gömbbe maximális térfogatú hengert.

15. Feladat. Adott kerületű háromszögek közül melyik területe maximális?

16. Feladat. Egy gyárban a gyártási folyamat során egy a oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez minden sarkából eltávolítanak egy-egy, egymással egybevágó négyzet alakú részt, az ábra szerint. Ezek után a szaggatott vonalak mentén a lapokat felhajtják, s élük mentén összeforrasztják őket, így egy felül nyitott, téglalaprak alakú dobozt képezve.

Mekkora az a értéke, ha az ezen eljárással készíthető maximális térfogatú doboz térfogata 1024 cm^3 ?



17. Feladat. Adott térfogatú, felül nyitott hengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne? És ha nem nyitott felül?

18. Feladat. Adott felszínű, felül nyitott téglatest alakú dobozok közül melyiknek térfogata maximális?

19. Feladat. Egy üzemben 4000 cm^3 térfogatú felül nyitott, négyzetes alapú egyenes hasáb alakú edényeket gyártanak. Melyiknek minimális a felszíne?

«EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI FELADAT 2012. OKTÓBER 7. FELADAT»

20. Feladat. Egy egyenes körhenger tengelymetszetének kerülete 6 m . Mekkora a maximális térfogatúnak a méretei?

NEVEZETES KÖZEPEK KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG KÉT TAGRA:

21. Feladat. Tudjuk, hogy a háromszög A csúcsából húzott magassága harmonikus közepe annak a két szakasznak, amelyekre a magasság a BC oldalt bontja. Mekkora $\text{tg}\beta + \text{tg}\gamma$?

22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a < \frac{b+c}{2}$, akkor $s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

23. Feladat. Az ABC derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel élve határozzuk meg

$$\frac{s_a + s_b}{s_c}$$

maximumát.

NEVEZETES KÖZEPEK KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG n TAGRA:

24. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói $a, b, \in \mathbb{Z}$, és az átfogóhoz tartozó magassága m , akkor

$$m \leq \frac{\sqrt{a^a \cdot b^b}}{\sqrt{2}}.$$

25. Feladat. Egy egység oldalú szabályos n -szög egy P belső pontja a sokszög oldalaitól rendre d_1, d_2, \dots, d_n távolságra van. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} > 2\pi.$$

26. Feladat. Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra írható négyzetek területének összege.

27. Feladat. Határozzuk meg a $d = 2 \cdot \sqrt{3}$ testátlójú téglatestek közül a maximális térfogatút.

28. Feladat. Adott élösszegű téglatestek közül melyiknek a

(a) térfogata,

(b) felszíne

a legnagyobb?

JENSEN-EGYENLŐTLENSÉG:

29. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

30. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq 2 \cdot \sqrt{3}.$$

31. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

32. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

33. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2-b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} \geq 3.$$

34. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1.$$

35. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq 3 \cdot \sqrt{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

36. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ egy konvex n -szög szögei, akkor

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n < \left(\frac{2\pi}{n} \right)^n.$$

37. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$k \geq 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot t.$$

38. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarai)

$$r_a + r_b + r_c \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k.$$

39. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (R a köré írt kör sugara)

$$k \leq 3 \cdot \sqrt{3} \cdot R.$$

40. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$t \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot R^2.$$

41. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$4t \leq \sqrt{3 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}.$$

TOVÁBBI FELADATOK:

42. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint a hozzá tartozó oldal bármely belső pontjának a másik két oldaltól vett távolságösszege. (Varga Tamás Matematikaverseny, 2009. megyei)

43. Feladat. Adott hegyesszögű háromszögbe írjunk minimális kerületű háromszöget! (Fagnano, 1775)

44. Feladat. Adott hegyesszögű háromszögben keressük meg azt a pontot, amelyre a csúcsoktól vett távolságösszeg minimális! (Fermat-pont, izogonális pont)

45. Feladat. Egy téglatest térfogata 8 cm^3 . Minden élét 1 cm -rel növelve, a keletkező téglatest térfogata 27 cm^3 lesz. Mekkora lesz a térfogata, ha ismét megnöveljük az éleit 1 - 1 cm -rel?

HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG

46. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldalának hossza kisebb, mint a terület fele.

47. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalának hossza kisebb, mint az őt közrefogó oldalak hosszának számtani közepe.

48. Feladat. Egy háromszögben $ab + bc + ca = 12$. Milyen határok közé esik a kerülete?

49. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{3}{4}k < s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}k.$$

50. Feladat. Igazoljuk, hogy a, b, c pontosan akkor egy háromszög oldalai, ha bármely $p+q = 1$ számokra $pa^2 + qb^2 > pqc^2$.

NEVEZETES KÖZEPEK

51. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely a, b befogójú derékszögű háromszögben $a + b \leq \sqrt{2}c$.

52. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\gamma \leq \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

53. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}.$$

54. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 \geq s^2.$$

55. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq s^2.$$

56. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2 \leq s^2.$$

57. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$m_a + m_b + m_c \geq 9r.$$

58. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög pontosan akkor szabályos ha

$$m_a c + m_b a + m_c b = 6t.$$

59. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$r_a + r_b + r_c \geq 9r.$$

60. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben (s a félkerület)

$$2s^2 \geq 27Rr.$$

61. Feladat. Legyenek az ABC háromszög belső szögfelezőinek a háromszögbe eső szakaszainak hosszai rendre x, y, z . Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

62. Feladat. Adott kör köré írható háromszögek közül határozzuk meg a minimális

- (a) területűt,
- (b) kerületűt.

63. Feladat. Igazoljuk, hogy adott kör köré írható háromszögek közül a szabályos háromszög esetén minimális az $OA^2 + OB^2 + OC^2$ érték, ahol O a kör középpontja.

64. Feladat. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög egy P belső pontjának a háromszög csúcsaitól vett távolsága rendre p, q, r , míg az oldalaktól vett távolsága rendre x, y, z . Igazoljuk, hogy $pqr \geq 8xyz$.

SUGÁREGYENLŐTLENSÉG ÉS NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

65. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben $R \geq 2r$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha a háromszög szabályos. (Sugáregyenlőtlenség.)

66. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

67. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

68. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

69. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \geq 4.$$

70. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$s \geq 3\sqrt{3}r.$$

ERDŐS-MORDELL EGYENLŐTLENSÉG

71. Feladat. Legyen az ABC háromszög egy P belső pontjának a háromszög csúcsaitól vett távolsága rendre p, q, r , míg az oldalaktól vett távolsága rendre x, y, z . Igazoljuk, hogy $p+q+r \geq 2(x+y+z)$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P a szabályos háromszög középpontja.

XI. évfolyam.

6. szám.

1935. február 15.

KÖZÉPISKOLAI

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Megjelenik minden hó tizenötödikén.

Előfizetési ár egy évre 8 aranypengő, félévre 4 aranypengő.

Szerkesztőség és kiadóhivatal: XI, Verpeléti-út 22. III. 4.

Egy geometriai probléma megoldása.

Ha O az $ABC\Delta$ belsejében fekvő pont, P, Q, R az O pontnak a BC, CA, AB oldalakon való vetületei, akkor

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \geq 2(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}).$$

Ezen tételnek itt következő megoldása MORDELL L. J. manchesteri egyetemi tanártól, a számelmélet kiváló művelőjétől való és szíves engedelmével közöljük.

Maga a tétel ERDŐS PÁL-tól származik.

72. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben (r a beírt kör sugara, p, q, r' pedig az Erdős-Mordell tételben p, q, r -ként szereplő távolságok)

$$6r \leq p + q + r'.$$

73. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$

TOVÁBBI FELADAT(OK)

74. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben fennáll az $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}t$, Weitzenböck-egyenlőtlenség (1919) Hadwiger-Finsler-féle élesítése (1937):

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4\sqrt{3}t.$$