Elemi matematika 3. - MTN424g

A Jensen-egyenlőtlenség

Definíció: Az $f(x)$ függvény konvex/konkáv $[a;b] \subset D_f$-en, ha ezen az intervallumon bármely ívének minden pontja a az ív végpontjait összekötő húr alatt/felett; vagy magán a húron van. Szigorú konvex/konkáv esetről akkor beszélünk, ha a végpontok kivételével minden pont a húr alatt/felett van.

Jensen-egyenlőtlenség: Az $f(x)$ függvény pontosan akkor konvex $[a;b] \subset D_f$-en, ha bármely $x_1, x_2 \in [a;b]$ esetén

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Megjegyzés:

(a) Szigorú konvex esetben szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

(b) Konkáv esetben az egyenlőtlenség fordított.

Az egyenlőtlenség néhány változata (konvex esetre):

(a) Kéttagú szimmetrikus:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

(b) n-tagú szimmetrikus:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

(c) n-tagú súlyozott: legyen $q_1+q_2+\ldots+q_n = 1:$

$$f(q_1x_1+\ldots+q_nx_n) \le q_1 \cdot f(x_1)+\ldots+q_n \cdot f(x_n).$$

1. Feladat. Igazoljuk hogy $\ln x$ szigorúan konkáv.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy $\sin x$ a $[0;\pi]$-n szigorúan konkáv.

Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok

3. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \ge 2\cdot\sqrt{3}.$$

5. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

6. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2-c^2} \ge 3.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1.$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\operatorname{tg}^n\alpha+\operatorname{tg}^n\beta+\operatorname{tg}^n\gamma\geq 3\cdot\sqrt{3^n},\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ egy konvex n-szög szögei, akkor

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n<\left(\frac{2\pi}{n}\right)^n.$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$k\geq 2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}\cdot t}.$$

12. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarai)

$$r_a+r_b+r_c\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot k.$$

13. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (R a köré írt kör sugara)

$$k\leq 3\cdot\sqrt{3}\cdot R.$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$t\leq\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot R^2.$$

15. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$4t\leq\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$