Elemi matematika 3. - MTN424g
A CAUCHY-SCHWARZ-BUNYAKOVSZKIJ EGYENLŐTLENSÉG

1. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

2. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) $4a + 3b \leq 5\sqrt{a^2 + b^2}$,
(b) $4a + 3b \leq \sqrt{a^2 + 9} \cdot \sqrt{b^2 + 16}$,
(c) $\sqrt{7a+1} + \sqrt{7b+1} \leq 3 \cdot \sqrt{2}$, ha $a + b = 1, 7a + 1, 7b + 1 \geq 0$.
Találjunk ki hasonló feladatokat!

3. Feladat. Határozzuk meg a $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ kifejezés minimumát, ha $a + b = 7, a, b, \in \mathbb{R}^+$.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív és $a + b = 1$, akkor

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Általánosítsunk!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n > 1, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\frac{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 4} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d pozitív, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív és $abc = 1$, akkor

$$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, akkor $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \leq Q_n$.

12. Feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 11 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 66 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert.

13. Feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 60 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 120 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert.

14. Feladat. Oldjuk meg a $\cos x \cdot \sin 7x + \cos 5x \cdot \sin x = \sqrt{2}$ egyenletet.

15. Feladat. Oldjuk meg az $x \cdot \sqrt{1-x} + \sqrt{3+x} = 2\sqrt{x^2+1}$ egyenletet a pozitív számok halmazán.

A Bernoulli-egyenlőtlenség

16. Feladat. Legyen $x \geq -1$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Igazoljuk, hogy ekkor $(1+x)^n \geq 1 + nx$, és ha $n > 1$, akkor egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$.

17. Feladat. Igazoljuk, hogy létezik olyan n természetes szám, amelyre $1,0001^n > n^{100}$.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy $(1 + \frac{1}{n})^n$ szigorú monoton nő.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely pozitív természetes szám esetén $n^n \geq (n+1)^{n-1}$.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b, > 0$ és $0 < x < 1$, akkor $(a+b)^x \cdot a^{1-x} < a + bx$.

22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x, y, z > 0$ és $xyz = 1$, és $q \geq 1$, akkor

$$x^{\frac{1+q}{2}} + y^{\frac{1+q}{2}} + z^{\frac{1+q}{2}} \geq x + y + z.$$