Elemi matematika 3. - MTN424g

EGYENLŐTLENSÉGEK RENDEZÉSI TÉTELRE

Definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számsorozat azonosan rendezett/ellentétesen rendezett, ha minden $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$-re $a_i \leq a_j$-ből következik, hogy $b_i \leq b_j / b_i \geq b_j$.

Tétel (Rendezési-tétel, Szűcs Adolf egyenlőtlenség): Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sorozatokra $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ egy permutációja, akkor $a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$ akkor maximális/minimális ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ azonosan/ellentétesen rendezett.

1. Feladat. Igazoljuk a rendezési tételt.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{c}{b}} + \frac{1}{c^3}\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{3}{2}.$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b}.$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$abc(a+b+c) \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $c_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$n^2 \leq (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}\right).$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq (abc)^{a+b+c}.$$

15. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és a $y_1, y_2, \ldots, y_n$, pozitív, ellentétesen rendezett szám n-esek, akkor

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

16. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \geq G_n$.