

Elemi matematika 3. - MTN424g

A NEVEZETES KÖZEPEK KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉGEK n TAGRA

1. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \leq Q_n$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pozitív, akkor

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, és $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \cdot \sqrt{3}.$$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$ és $abc = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x}$ függvény maximumát.

6. Feladat. Oldjuk meg az

$$\frac{6^x}{2^x + 3^x} + \frac{15^x}{3^x + 5^x} + \frac{10^x}{2^x + 5^x} = \frac{2^x + 3^x + 5^x}{2}$$

egyenletet.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, akkor

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n pozitív természetes szám, akkor

$$\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2 \cdot \sqrt[n]{n}.$$

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói $a, b, \in \mathbb{Z}$, és az átfogóhoz tartozó magassága m , akkor

$$m \leq \frac{\sqrt{a^b \cdot b^a}}{\sqrt{2}}.$$

10. Feladat. Egy egység oldalú szabályos n -szög egy P belső pontja a sokszög oldalaitól rendre d_1, d_2, \dots, d_n távolságra van. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} > 2\pi.$$

11. Feladat. Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra írható négyzetek területének összege.

12. Feladat. Határozzuk meg a $d = 2 \cdot \sqrt{3}$ testátlójú téglatestek közül a maximális térfogatút.

13. Feladat. Adott élösszegű téglatestek közül melyiknek a

(a) térfogata,

(b) felszíne

a legnagyobb?