**Elemi matematika 3. - MTN424g**

A nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek két tagra

**1. Feladat.** Legyen $a, b > 0$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$H(a;b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} \le G(a;b) = \sqrt{ab} \le A(a;b) = \frac{a+b}{2} \le Q(a;b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy a trapéz középvonalának hossza az alapjai hosszának számtani közepe.

**3. Feladat.** Igazoljuk, hogy annak, az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely a trapézt két hasonló trapézra bontja, az alapjai hosszának mértani közepe.

**4. Feladat.** Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza a trapéz alapjai hosszának harmonikus közepe.

**5. Feladat.** Igazoljuk, hogy annak, az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely a trapézt két egyenlő területű trapézra bontja, az alapjai hosszának négyzetes közepe.

**6. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $a, b$ pozitív, akkor

$$G(a;b) = \sqrt{A(a;b) \cdot H(a;b)}.$$

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $a, b$ pozitív, akkor

$$G(a;b) = G(H(a;b); A(a;b)).$$

**8. Feladat.** Az $a, b$ pozitív mennyiségek $n$-edik hatványközepe: $K_n(a;b) = \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$. Igazoljuk, hogy

$$K_2(a;b) \le K_3(a;b).$$

**9. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $x, y > 0$ és $x + y = 1$, akkor

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \ge \frac{25}{2}.$$

**10. Feladat.** (a) Legyen $a + b = 42$. Mikor lesz $a^2 + b^2$ minimális?

(b) Egy 50 cm hosszú szakaszt két részre osztva, az egyes részek fölé négyzeteket írtunk. Hogyan osszuk két részre a szakaszt, hogy a négyzetek területének összege minimális legyen?

(c) Egy 120 cm-es szalagot hol vágjunk ketté, hogy az egyes részekből hajtható négyzetek területének összege minimális legyen?

**11. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $x, y, z$ pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}.$$

**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \ge \sqrt{2}(a+b+c).$$

**13. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{b^2+(1-c)^2} + \sqrt{c^2+(1-a)^2} \ge \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

**14. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $a_1; a_2; \ldots; a_n$ pozitív, akkor

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}.$$

## Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok

**15. Feladat.** Tudjuk, hogy a háromszög A csúcsából húzott magassága harmonikus közepe annak a két szakasznak, amelyekre a magasság a BC oldalt bontja. Mekkora $\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma$?

**16. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a<\frac{b+c}{2}$, akkor $s_a>\frac{s_b+s_c}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

**17. Feladat.** Az $ABC$ derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel élve határozzuk meg

$$\frac{s_a+s_b}{s_c}$$

maximumát.