

Elemi matematika 3. - MTN424g

A SZÁMTANI-MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG KÉT TAGRA

1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív, akkor $G(a; b) \leq A(a; b)$, azaz $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, és egyenlőség pontosan akkor (akkor és csak akkor) áll fenn, ha $a = b$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$. Mikor áll fenn egyenlőség? Általánosítsunk!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai, s a félkerülete, akkor

$$8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc.$$

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 16abc$. Általánosítsunk!

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d nemnegatív, akkor

$$\sqrt{(a + b)(c + d)} + \sqrt{(a + c)(b + d)} + \sqrt{(a + d)(b + c)} \geq 6 \cdot \sqrt[4]{abcd}.$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d nemnegatív és $abcd = 1$, akkor

$$\sqrt{(a + b)(c + d)} + \sqrt{(a + c)(b + d)} + \sqrt{(a + d)(b + c)} \geq 6.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív, akkor

$$a \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + b \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Általánosítsunk!

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c nemnegatív és $a + b + c = 1$, akkor $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < 2$.

13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív és $ab = 1$ és $a > b$, akkor

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2 \cdot \sqrt{2}.$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b nemnegatív, akkor

$$\frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{4}(a + b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

15. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z nemnegatív és $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$, akkor

$$\frac{x^2}{x + y} + \frac{y^2}{y + z} + \frac{z^2}{z + x} \geq \frac{1}{2}.$$

16. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Általánosítsunk!

17. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{x-y+z}{\sqrt{xz}} + \frac{x+y-z}{\sqrt{xy}} + \frac{-x+y+z}{\sqrt{yz}} \leq 3.$$

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, és $a+b+c=1$, akkor

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} < 4.$$

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i pozitív ($i = 1, 2, \dots, n$), és $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{2a_i+1} < n+1.$$

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, és

(a) $a+b+c=1$, akkor $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$,

(b) $a+b+c=1$, akkor $\sqrt{6a+1} + \sqrt{6b+1} + \sqrt{6c+1} < 6$,

(c) $a+b+c=2$, akkor $\sqrt{6a+1} + \sqrt{6b+1} + \sqrt{6c+1} < 9$.

22. Feladat. Legyen x_i nemnegatív ($i = 1, 2, \dots, n$), és $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Határozzuk meg $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ maximumát.

23. Feladat. Bontsuk fel a 18-at két tag összegére úgy, hogy a tagok szorzata a legnagyobb legyen.

24. Feladat. Tudjuk, hogy az a, b nemnegatív számokra $a+b=42$. Mikor lesz a^2+b^2 minimális?

25. Feladat. Oldjuk meg a

$$4^{x^2} + 16^{x^2} = 2 \cdot 7^{x^2}$$

egyenletet.

26. Feladat. Oldjuk meg a

$$2^{2^{x+2}} + 2^{2^{-x}} = 8$$

egyenletet.

27. Feladat. Oldjuk meg a

$$(4^x + 9^x)(9^x + 25^x)(25^x + 4^x) = 8 \cdot 900^x$$

egyenletet.

28. Feladat. Oldjuk meg a

$$(\sin^4 x + 1)(\cos^4 x + 1) = \frac{25}{16} \sin^4 2x$$

egyenletet.

29. Feladat. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$$

egyenletet.

30. Feladat. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4 \cdot \sqrt{3x - 2} + 6 &= y \\ y^2 - 4 \cdot \sqrt{3y - 2} + 6 &= x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer.

31. Feladat. Legyen az a, b, c pozitív számokra, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Keressük

$$S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

minimumát.

32. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n pozitív természetes szám, akkor

$$2 \cdot \sqrt{n+1} - 2 \cdot \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 \cdot \sqrt{n} - 2 \cdot \sqrt{n-1}.$$

33. Feladat. Igazoljuk, a fentiek segítségével, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

34. Feladat. Határozzuk meg

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x}$$

minimumát.

35. Feladat. Határozzuk meg

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}$$

minimumát.

36. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x > 1$, akkor

$$\log_x(x+1) > \log_{x+1}(x+2).$$

37. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{9x^2 + 4}{x}$$

függvény minimumát a pozitív számok halmazán.

38. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{a + bx^4}{x^2}$$

függvény minimumát ahol a, b nemnegatív valós paraméter.

FELADATOK „ $x + \frac{1}{x}$ ”-TÍPUSÚ EGYENLŐTLENSÉGEKRE

39. Feladat. Milyen határok közé esik $x + \frac{1}{x}$, ha x pozitív? És ha negatív?

40. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

41. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\log_{\pi} 2} + \frac{1}{\log_2 \pi} > 2.$$

42. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a > 1$, akkor

$$a^{\frac{x^2}{4}} + a^{\frac{4}{x^2}} \geq 2a.$$

43. Feladat. Oldjuk meg

$$9^x + 9^{\frac{1}{x}} = 18.$$

44. Feladat. Oldjuk meg a

$$2 \cos y = x + \frac{1}{x}$$

egyenletet.

45. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

46. Feladat. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma + \sin \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta} \geq \frac{3}{2}.$$

47. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Ez az ún. Nesbitt-egyenlőtlenség.)

48. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

maximumát a pozitív számok halmazán.

49. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós szám esetén

$$\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2.$$

50. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós szám esetén

$$\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2.$$

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

51. Feladat. 200 méter hosszú kerítéssel szeretnénk egy épület fala mentén három oldalról körbekeríteni egy téglalap alakú részt. Mekkora-nak válasszuk az oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?

52. Feladat. Határozzuk meg adott kerületű téglalapok közül a maximális területűt, illetve adott területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

53. Feladat. Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

54. Feladat. Adott felszínű téglatestek közül melyik testátlója minimális?

55. Feladat. Egy téglatest egyik lapjának területe 1 dm^2 , az élek hosszának összege 20 dm . Mekkora ezen téglatestek felszínének maximuma?

56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a = \sqrt{bc}$, akkor $\alpha \leq 60^\circ$.

57. Feladat. Egy háromszögbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van. Igazoljuk, hogy a négyzet területe legfeljebb a háromszög területének fele.

58. Feladat. Mekkora a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

59. Feladat. Egy háromszög egyik oldala 1 , másik két oldala hosszának összege állandó. Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt köre területe szorzatának legnagyobb értékét!

60. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogójának a hossza, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab(a + b + c)} \geq \sqrt{2}.$$

61. Feladat. Egy trapéz egyik alapja 12 cm , a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm . Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

62. Feladat. Egy körcikk területe 16 . Mekkora a sugara, ha kerülete minimális?

63. Feladat. Adott kerületű negyed-körgyűrűcikkék közül melyiknek a területe maximális?