

**Elemi matematika 3. - MTN424g**  
„JÁTÉKOS” EGYENLŐTLENSÉGEK

**1. Feladat.** Igazoljuk, hogy

(a)  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3.$

(b)  $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}} < 15.$

(c)  $\sqrt{100 + \sqrt{99 + \dots \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < 11.$  (Igaz-e az egyenlőtlenség 100-on „túl” is? Meddig?)

Általánosítsunk, találjunk ki hasonló feladatokat.

**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy

(a)  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} > n,$  ha  $n > 1, n \in \mathbb{N}.$

(b)  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$  ha  $n > 1, n \in \mathbb{N}.$

**3. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $n > 1, n \in \mathbb{N},$  akkor

(a)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$

(b)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$

**4. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $n \in \mathbb{N}^+,$  akkor

(a)  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2,$

(b)  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$

**5. Feladat.** Igazoljuk, hogy

(a)  $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b,$

(b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \geq 0,$

(c)  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$

(d)  $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c,$

(e)  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \geq \frac{1}{3},$

(f)  $\frac{(y-6)^2}{3xy} + x \cdot \frac{y+3}{y} \geq 4 + x - \frac{4}{x} - \frac{xy}{12},$  ha  $x, y > 0.$

**6. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha az  $a, b, c$  pozitív számokra

$$a + b + c \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca},$$

akkor közülük valamelyik szám legalább 1.

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $a, b, c$  pozitív, akkor

(a)  $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a,$

(b)  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2),$

(c)  $a^2 + b^2 \leq \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}.$

**8. Feladat.** Oldjuk meg az  $5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$  egyenlőtlenséget a valós számpárok halmazán.

**9. Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$  függvény minimumát.