

Elemi matematika 1. - MTN224g
RÁCSGEOMETRIA

1. Feladat. Igazoljuk, hogy a síkban öt rácspont közül mindig kiválasztható kettő, melyeket összekötő szakasz valamely belső pontja is rácspont.

2. Feladat. Általánosítsuk az előző feladatot.

3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex rácskilencszögnek van három olyan csúcsa, amelyek által meghatározott háromszög súlypontja szintén rácspont. (KöMaL B4077)

4. Feladat. Legfeljebb hány rácspontot tudunk felvenni a térben úgy, hogy egyik általuk meghatározott szakasz felezőpontja a se legyen rácspont?

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácspontot tükrözünk egy rácszakasz felezőpontjára, akkor az rácspont lesz.

6. Feladat. Ezen eredmény felhasználásával alkossunk „saját” feladatokat.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy egy, az origón áthaladó egyenesen vagy pontosan egy, vagy végtelen sok rácspont van.

8. Feladat. A fentiek alapján igazoljuk, hogy a sík minden egyenese a következő hat csoport valamelyikébe tartozik.

- (a) Meredeksége irracionális, és nem halad át rácsponton,
- (b) meredeksége irracionális, és pontosan egy rácsponton halad át,
- (c) meredeksége racionális, és nem halad át rácsponton,
- (d) meredeksége racionális, és végtelen sok rácsponton halad át,
- (e) az y tengellyel párhuzamos és nem halad át rácsponton,
- (f) az y tengellyel párhuzamos és végtelen sok rácsponton halad át.

9. Feladat. Vágjuk ki a számegyenesből a $[0, 1]$ intervallumot és ragasszuk össze két végpontját, így egy kör keletkezik: ennek racionális pontjain ugrál egy nyúl. A nyúl a 0-ból indul és minden másodpercben ugyanabba az irányba, és ugyanakkorát ugrik. El tudjuk-e kapni véges sok lépésben, ha másodpercenként csak egy pontra tudunk csapdát tenni? (A nyulat csak akkor vesszük észre, ha a csapdában van.)

« SULINET »

10. Feladat. Hány racionális koordinátájú ponton halad át egy origó középpontú

- (a) $\sqrt{2}$,
- (b) $\sqrt{3}$

sugarú kör?

« SULINET »

11. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén van olyan kör, amely belsejében pontosan n rácspont van.

12. Feladat. A nyitott első tértőlcsad $(x, y, z > 0)$ hány rácspontján halad át az $S : x + y + z = 15$ egyenletű sík?

« SULINET »

13. Feladat. Egy 2008 egység befogójú, egyenlőszárú derékszögű ABC háromszöget helyezünk el a koordináta síkon úgy, hogy a derékszög csúcsa (C) az origó legyen, és a két befogó a tengelyek pozitív félegyenesére kerüljön. Hány olyan egész koordinátájú P pont van a háromszöglemezen, amelyre PA^2, PB^2, PC^2 számok egy számtani sorozat egymást követő három tagját adják ebben a sorrendben?

« NMMV 2007. 12/3 »

14. Feladat. Az XOY derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(0, 51)$ és $B(78, 51)$ pontok. Létezik-e az OX tengelyen olyan M pont, melyre az MAB háromszög belsejében elhelyezkedő rácspontok száma pontosan 2002? (A rácspontok azon pontok melyek koordinátái egész számok.)

« NMMV, 2002, 12/2 »

15. Feladat. Vonalas füzetünkben a szomszédos egyenesek távolsága 1 egység. Létezik-e olyan téglalap, amely oldalainak hossza egész és csúcsai négy különböző vonalra illeszkednek?

16. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely rácssokszög területének a kétszerese egész.

17. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely rácssokszög területe legalább $1/2$.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácssokszög határán h , belsejében b rácspont van, akkor a sokszög $h + 2b - 2$ üres rácsháromszögre (a belsejében, és a csúcsoktól eltekintve a kerületén sem tartalmaz rácspontot) bontható.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy minden üres rácsháromszög területe $1/2$.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy egy üres rácsháromszög nem lehet hegyesszögű.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácssokszög határán h , belsejében b rácspont van, akkor a sokszög területe $h/2 + b - 1$. Ez az ún. Pick-képlet.

22. Feladat. A „kockás” papíron adott egy 2005 egység oldalhosszúságú négyzet, amelynek oldalai rácsegyenesek. Rajzoljunk a négyzetbe egy olyan önmagát át nem metsző zárt töröttvonalat, amelynek minden szakasza rácsegyenes mentén halad és az összes olyan rácsponton pontosan egyszer megy át, amelyik a négyzet belsejében vagy annak határán fekszik. Mutassuk meg, hogy a töröttvonal által határolt sokszög területe nagyobb, mint a négyzet területének fele. (KöMaL B3831)

23. Feladat. Igazoljuk, hogy minden üres rácsparalelogramma területe 1.

24. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs szabályos rácsháromszög (a síkban).

25. Feladat. Keressünk szabályos rácsháromszöget a térben.

26. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs a síkon szabályos rácsoöttség.

27. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs szabályos rác n -szög, ha $n \geq 7$.