Elemi matematika 1. - MTN224g
Diofantoszi egyenletek

1. Bevezető feladatok

1. Feladat. Oldjuk meg az $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ egyenletet, ha tudjuk, hogy x, y, z, u ebben a sorrendben, egymást követő egész számok.

2. Feladat. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán! $yx + y + x = 1992$

« Felvételi feladat a Ságváriba (Szeged) 1994/7 »

3. Feladat. Oldjuk meg az $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3$ egyenletet az egész számok halmazán.

4. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} = 1$.

5. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1000$.

6. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

7. Feladat. Oldjuk meg az egészek halmazán az $a+b+c = 31, a^2+b^2+c^2 = 325$ egyenletekből álló egyenletrendszert.

8. Feladat. Oldjuk meg az egészek halmazán az $a+b+c = 7, a^3+b^3+c^3 = 1$ egyenletrendszert.

9. Feladat. Egy háromjegyű számból 561-et levonva, jegyei összegének 34-szeresét kapjuk. Melyik ez a szám?

10. Feladat. Ha egy háromjegyű, tízes számrendszerbeli számot elosztunk a fordítottjával, hányadosul 3-at, maradékul pedig a szám számjegyeinek összegét kapjuk. Mi lehet ez a szám?

« KöMaL C 425. »

2. Oszthatósági vizsgálattal megoldható egyenletek

11. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán:
(a) $xy(x + y) = 2017$,
(b) $2016^a + 2017^b = 2018^c$,
(c) $x^2y^3 = x^3y^2 + 2017$.
Alkossunk a fenteik alapján saját, hasonló feladatokat!

12. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $a^3 - a = 3b^2 + 2018$.

13. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán
(a) $3x^2 - 4y^2 = 13$,
(b) $2^x + 7^y = 19^z$.
A fentiek alapján alkossunk hasonló feladatokat.

14. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^3 + 6x^2 + 5x = 27y^3 + 9y^2 + 9y + 1$ egyenletet.

15. Feladat. Oldjuk meg: $x^2 - 2xy = 10^6 - 10$.

16. Feladat. Állítsuk elő a 2006-ot két négyzetszám összegeként!

17. Feladat. Igazoljuk, hogy az $n^2 + m^2 = 111111$ egyenletnek nincs megoldása az egész számpárok halmazán.

18. Feladat. Oldjuk meg: $15x^2 - 7y^2 = 9$.

19. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $5^n + 11^n = 12^n$.

3. Diofantoszi egyenletre vezető különböző szöveges feladatok

20. Feladat. Egy szülinapi zsúron 9-en vettek részt, mindenki azonos számú süteményt evett és kimaradt 2 szelet. Ha csak 6-an lettek volna és szintén mindenki egyformán fogyaszt, akkor is 2 szelet maradt volna ki. Hány szelet sütemény készült a zsúrra, ha tudjuk, hogy 40-nél kevesebb készült?

« Felvételi feladat a Ságváriba (Szeged) 1998/7 »

21. Feladat. Egy általános iskola egyik őrse expedícióra indul. A kitűzött helyre érve felverik sátraikat. Ha minden sátorba egy személy megy, akkor 13 úttörő hely nélkül marad, ha 8 személy megy, akkor egy sátor üresen marad. Hányan voltak az őrsben? Hány sátor volt?

« Felvételi feladat a Ságváriba (Szeged) 1976/2 »

22. Feladat. Egy sakkversenyen két hetedik osztályos és néhány nyolcadik osztályos tanuló vett részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott. A két hetedik osztályos együtt szerzett nyolc pontot, a nyolcadik osztályosok pedig mind egyenlő számú pontot szereztek. Hány nyolcadikos vett részt a versenyen? (A sakkban a döntetlenért fél-fél pont jár, a vesztességért nem jár pont, a győzelemért egy pont jár.)

23. Feladat. Egy sakkversenyen kilencedikesek és tizedikesek vettek részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. A tizedikesek tízszer annyian voltak, mint a kilencedikesek, és együtt 4,5-szer annyi pontot gyűjtöttek, mint a kilencedikesek. Hány kilencedikes, és hány tizedikes indult a versenyen?

4. Feladatok faktoriálissal

24. Feladat. Oldjuk meg az $n! + 3 = x^2$ egyenletet, ahol $n, x, \in \mathbb{N}^+$.

25. Feladat. Az előző feladatban milyen értéket írhatunk még a 3 helyett?

26. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $(n! + 1)(m! + 1) = (n + m)!$

27. Feladat. Oldjuk meg az $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$ egyenletet.

28. Feladat. Oldjuk meg az $1! + 2! + \ldots + n! = m^l$ egyenletet, ha $l > 2$.

29. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x! + y! = z!$ egyenletet.

30. Feladat. Oldjuk meg az $a! + b! + c! = \overline{abc}$ egyenletet.

5. További feladatok

31. Feladat.

(a) Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x(y + 1)^4 = 243y$ egyenletet.
(b) Oldjuk meg az egyenletet az egész számok halmazán is.
(c) Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x(y + 1)^n = 243y$ egyenletet.

A megoldás mintájára alkossunk hasonló feladatokat.

32. Feladat. Hány megoldása van a pozitív egészek halmazán az $3^x+5^y=8z-2$ egyenletnek?

33. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $x^3+7y=y^3+7x$ egyenletet, ha $x \neq y$.

34. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1988}$ egyenletet.

35. Feladat. Oldjuk meg az $x+y+z=3xyz$ egyenletet a pozitív egészek halmazán!

36. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ egyenletet.

37. Feladat. Oldjuk meg az $1+x+x^2+x^3=2^y$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

38. Feladat. Oldjuk meg a $3^y=1+2^x$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

39. Feladat. Oldjuk meg a pozitív számok halmazán: $x^2+y^2=z^2$.

40. Feladat. Igazoljuk, hogy minden pitagoraszi számhármasnak van a) 3-mal, b) 4-gyel, c) 5-tel osztható eleme.

41. Feladat. Van-e olyan derékszögű háromszög, amely oldalainak hosszai egész számok és az átfogóhoz tartozó magasság hossza 2/3-a az egyik befogó hosszának?

6. Feladatok a végtelen leszállás módszerére

42. Feladat. Oldjuk meg: $x^2+y^2+z^2=2xyz$, $x,y,z \geq 0$.

43. Feladat. Oldjuk meg az $x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0$ egyenletet a pozitív egészek halmazán.

44. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán: $x^2+y^2=4^z$.

7. Difantoszi egyenletre vezető feladatok a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny feladataiból

45. Feladat. Határozzuk meg az x, y egész számokat, ha $x^2-2xy+2y^2-4y^3=0$.

« NMMV 1992. 9/5 »

46. Feladat. Határozzuk meg az a és b egész számokat, amelyekre az $x^2-ax+2a+b^2=0$ egyenlet gyökei közvetlen egymás utáni természetes számok!

« NMMV 2003. 10/1 »

47. Feladat. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^y-x=y^x-y$ egyenletet.

« NMMV 1996. 11/2 »

48. Feladat. Melyek azok a természetes n számok, melyekre n^2-440 teljes négyzet?

« NMMV 2004. 10/3 »

49. Feladat. Létezik-e olyan x és y természetes szám, melyekre $7^x-5^y=2004$?

« NMMV 2004. 10/4 »

50. Feladat. Legyen $n > 1$ természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív természetes számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3 \dots x_n &= 1997 \\ x_2 + x_1x_3 \dots x_n &= 1997 \\ &\vdots \\ x_n + x_1x_2 \dots x_{n-1} &= 1997 \end{aligned}$$

« NMMV 1997. 10/4 »

51. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

« NMMV 1999. 12/3 »

52. Feladat. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000.$$

« NMMV 2000. 9/6 »

53. Feladat. Adjuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármasokat, amelyekre

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2001.$$

« NMMV 2001. 9/2 »

54. Feladat. Az

$$\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \dots, \frac{2000}{3}, \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$$

számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

« NMMV 2002. 11/1 »

55. Feladat. Hány megoldása van az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$ egyenletnek?

« NMMV 2005. 12/1 »

56. Feladat. Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa kerülete mérőszámának.

« NMMV 2001. 10/2 »

57. Feladat. Hány megoldása van az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2001}$$

egyenletnek az egész számok körében?

« NMMV 2001. 11/1 »

8. Kiegészítés: lineáris diofantoszi egyenletek

Az $ax+by=c$ alakú diofantoszi egyenlet megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy $(a,b)|c$ teljesüljön. A szükségesség nyilvánvaló, az elegendőség pedig azon múlik, hogy euklideszi-gyűrűkben, adott a,b esetén léteznek olyan x,y elemek, hogy $ax+by=(a,b)$ fennálljon. (Ez az a,b-n végzett euklideszi algoritmusból egyszerűen adódik.) Ekkor $\frac{c}{(a,b)}$ -vel beszorozva az eredeti egyenlet egy megoldását kapjuk. Természetesként merül fel a kérdés, ha az egyenlet megoldható és például a fenti módszerrel találtunk is egy megoldást, van-e több?

Az általános megoldás kétváltozós esetben

Tétel: Legyen x_0, y_0 az $ax+by=c$ alakú diofantoszi egyenlet egy megoldása. Ekkor az egyenlet összes megoldása előáll $x=x_0+\frac{b}{(a,b)}\cdot t$, $y=y_0-\frac{a}{(a,b)}\cdot t$ alakban, ahol $t\in\mathbb{Z}$.

Bizonyítás: A bizonyítás két részből áll. Elsőként azt kell igazolni, hogy a fentiek tényleg megoldások tetszőleges egész t esetén, ez az eredeti egyenletbe történő visszahelyettesítéssel egyszerűen igazolható. A második rész annak megmutatásából áll, hogy az összes megoldás előáll a fenti alakban. Ez a következőképp történhet. Legyen x_0, y_0 és x,y a fenti egyenlet egy-egy megoldása. Ekkor $ax+by=c$ és $ax_0+by_0=c$ is fönnáll. A két egyenlet különbségét véve $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ adódik. Ezt végigosztva a,b nemnulla legnagyobb közös osztójával, átrendezve az $\frac{a}{(a,b)}(x-x_0)=\frac{b}{(a,b)}(y_0-y)$ egyenlethez jutunk. Mivel $(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)})=1$, kapjuk, hogy $\frac{a}{(a,b)}|y_0-y$ és $\frac{b}{(a,b)}|x-x_0$. Léteznek tehát olyan t és t' egész számok, hogy $x-x_0=t\cdot\frac{b}{(a,b)}$ és $y_0-y=t'\cdot\frac{a}{(a,b)}$. Be kell még látni, hogy $t=t'$. Ez az $\frac{a}{(a,b)}(x-x_0)=\frac{b}{(a,b)}(y_0-y)$ egyenletbe történő visszahelyettesítéssel egyszerűen megtehető.

A megoldás három módja:

Tekintsük a $3x+7y=13$ diofantoszi egyenletet.

(a) **(euklideszi-algoritmus)** A tételben foglaltak szerint végezzünk euklideszi algoritmust a 3 és a 7 legnagyobb közös osztójának megkeresésére. Ez a következő: $7=2\cdot3+1$, $3=3\cdot3+0$ így kapjuk, (3, 7)=1. Ez nyilván osztója a 13-nak így van megoldás. Egy ú.n. partikuláris megoldás megtalálható tehát a következő módon: $1=7-2\cdot3$. (A helyzet most azárt ilyen egyszerű mert viszonylag kevés lépésben leállt az algoritmus.) Azaz $13=13\cdot7-26\cdot3$. Egy megoldás tehát: $x_0=-26, y_0=13$. Így az összes megoldást megadhatjuk a $x=-26+7t, y=13-3t$ alakban.

(b) **(fokozatos csökkentés)** Fejezzük ki az egyik ismeretlent a másik segítségével. Legyen például ez az x. Ekkor $x=\frac{13-7y}{3}=4-2y+\frac{1-y}{3}$. Mivel x egész, $\frac{1-y}{3}$ is egész, vagyis $3|1-y$, azaz létezik olyan s egész szám, hogy $s=\frac{1-y}{3}$, vagyis $y=1-3s$. Ezt x előbbi előállításába visszahelyettesítve $x=2+7s$ adódik. Megadtuk ismét az összes megoldást az s egész paraméter segítségével.

(c) **(kongruenciák)** Ha $3x+7y=13$ fennáll, akkor triviális, hogy teljesül a $3x+7y\equiv 13 (\bmod 3)$ kongruencia is. Ez utóbbiból $7y\equiv13 (\bmod 3)$, ahonnan $y\equiv1 (\bmod 3)$ nyerhető. Vagyis $y=3t+1$ alakú, ahol $t\in\mathbb{Z}$. Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $x=2-7t$.

A fentiek során bár különböző alakban, de természetesen ugyanazokat a megoldásokat kaptuk. Az is nyilvánvaló, hogy elég csak azokkal az egyenletekkel foglalkozni, ahol $(a; b) = 1$. Bár az utolsó módszer használja a kongruenciákat, előnye, hogy segítségével többismeretlenes egyenletek is megoldhatók.

Az általános megoldás n-változós esetben:

Tétel: Legyen $n \geq 2$. Ekkor az $a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n = b$, $(a_1; a_2; \ldots; a_n) = 1$ diofantoszi egyenletnek létezik megoldása és az összes megoldás leírható $n - 1$ paraméter segítségével.

Bizonyítás: A változók száma szerinti teljes indukcióval.

Egy példa: Oldjuk meg a $12x + 10y + 15z = 1$ diofantoszi egyenletet.

A megoldás a következők szerint történhet: $(12, 10) = 2$, így ha az eredeti egyenlőség fennáll, akkor teljesül a $12x + 10y + 15z \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ kongruencia is. Innen $15z \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ adódik, vagyis $z \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, azaz $z = 2t+1$, $t \in \mathbb{Z}$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe: $6x+5y = -15t-7$. Gondolatmenetünket újrakezdve, ha ez fennáll, akkor teljesül a $6x+5y \equiv -15t - 7 (\mathrm{mod}\ 6)$ kongruencia is, vagyis $5y \equiv -15t - 7 (\mathrm{mod}\ 6)$, azaz $y \equiv -15t - 7 (\mathrm{mod}\ 6)$, vagyis $y \equiv 3t + 1 (\mathrm{mod}\ 6)$. Azaz olyan $y = 3t + 1 + 6s$, ahol $s \in \mathbb{Z}$. Ezt és $y = 2t + 1$-t az eredeti egyenletbe visszaírva megkaphatjuk x-et az s és t paraméterek segítségével.