Elemi matematika 1. - MTN224g

Oszthatósági feladatok

1. Számjegyek összege, különbsége

1. Feladat. Hány olyan természetes szám van, amelyből elvéve a számjegyei összegét 2018-at kapunk?

2. Feladat. Egy számhoz a számjegyei összegét adva 1989-et kaptunk. Melyik ez a szám?

3. Feladat. Keressük meg mindazokat az x, y, z természetes számokat, melyekre teljesül, hogy x számjegyeinek összege y, y számjegyeinek összege z, és $x + y + z = 2018$.

4. Feladat. Keressük meg az összes olyan prímszámot amely az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza.

5. Feladat. Gondolj egy pozitív egész számra. Szorozd meg 18-cal, adj hozzá 63-at, majd töröld az eredmény bármely, 0-tól különböző számjegyét. A megmaradó számból megmondom a hiányzó számjegyet. Hogyan csinálom?

6. Feladat. Írjuk fel a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával a
(a) 100-at,
(b) 99-et
úgy, hogy a számjegyekből képezhetünk kétjegyű számokat (háromjegyűeket már nem érdemes), és csak az $+$ műveletet használhatjuk.

« Abacus 2008/5. »

7. Feladat. Egy számot a számjegyei szorzatával megszorozva 20102010-et kaptunk. Melyik ez a szám?

8. Feladat. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számjegyek két különböző sorrendjével képezzünk két 7-jegyű számot úgy, hogy egyik a másik kétszerese legyen.

9. Feladat. Legyen A és B hétjegyű, az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket pontosan egyszer tartalmazó szám. Igazoljuk, hogy $A \nmid B$.

10. Feladat. Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000.$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1998. 9. osztály 1. feladat »

11. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha a $\overline{2x3}$ számhoz 326-ot adva a 9-cel osztható $\overline{5y9}$ számot kapjuk.

12. Feladat. Hány olyan 11-gyel osztható szám van, amely mind a tíz számjegyet pontosan egyszer tartalmazza?

13. Feladat. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 12. osztály 4. feladat »

14. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromjegyű számot kétszer egymás után írva 11-gyel osztható hatjegyű számot kapunk.
(b) Milyen számot írhatunk még a 11 helyére, hogy a fenti oszthatóság továbbra is fennálljon?
(c) Gondolj egy háromjegyű szánra, majd vedd a fenti szám kétszeri felírásával kapott hatjegyű számot. Oszd el a számot 11-gyel, a hányadost 7-tel, a hányadost 13-mal. Mit tapasztalsz? Miért?

« Kalmár László Matematikaverseny, megyei forduló, 1993. 6. osztály »

15. Feladat. Lehet-e három egész élhosszúságú kocka térfogatának az összege 2002 egység?

« KöMaL C 690. »

2. További oszthatósági feladatok

16. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha $\overline{987x6}$ osztható

(a) 3-mal,
(b) 4-gyel,
(c) 5-tel,
(d) 6-tal,
(e) 7-tel,
(f) 8-cal,
(g) 9-cel,
(h) 11-gyel,
(i) 12-vel,
(j) 24-gyel,
(k) 36-tal,
(l) 72-vel.

17. Feladat. Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha

(a) $18|\overline{3438x}$
(b) $36|\overline{35x1y}$
(c) $36|\overline{351xx}$
(d) $45|\overline{15x67y}$
(e) $56|\overline{1xy358}$
(f) $72|\overline{x554y}$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $18|\overline{3438x}$, akkor

(a) $4|\overline{3438x}$
(b) $20|\overline{3438x}$
(c) $191|\overline{3438x}$

19. Feladat. Alkossunk a fentiekhez hasonló oszthatósági feladatokat úgy, hogy azoknak
(a) egy,
(b) páratlan sok,
(c) bármely számjegyekből álló számpár
megoldása legyen.

20. Feladat. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1990. 2. forduló 3. feladat 7. osztályosok versenye »

21. Feladat. Igazoljuk, hogy $2017^{2016} + 8$ nem prím.

22. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $9|10^{2018} - 1$
(b) $9|10^{2018} + 224$
(c) $6|10^{2018} + 224$
(d) $18|10^{2018} + 224$
(e) $36|10^{2018} + 224$
(f) $72|10^{2018} + 224$.

23. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) $5|1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \ldots + 11..1^{11..1}$ (Az összeg 2010 tagú.)

(b) $10|11^{2018} - 1$
(c) $2018|2019^{2019} + 2017^{2017}$
(d) $13|2^{70} + 3^{70}$.

24. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) $3|n^3 - n$
(b) $6|n^3 - n$
(c) $5|n^5 - n$
(d) $30|n^5 - n$
(e) $7|n^7 - n$
(f) $11|n^{11} - n$

(g) Vessük össze a fenteiket a következővel: Ha p prím és a egész, akkor $p|a^p - a$. Ez az ún. kis Fermat-tétel. Más alakja: Ha p prím és a egész, valamint $(p; a) = 1$, akkor $p|a^{p-1} - 1$. Így különböző, a feltételeknek eleget tevő a számokra $(1 < a < n, (a; n) = 1)$ letesztelhetjük, hogy n átmegy-e az $n|a^{n-1} - 1$ teszten. Ha nem, akkor biztos, hogy nem prím, ha igen, lehet, hogy prím. Bár egy összetett szám, csak $\frac{1}{2}$ valószínűséggel csúszik át a teszteb egy véletlen a-ra, vannak számok, melyek minden alkalmas a-ra átmennek a teszten, mégsem prímek, ezek a Carmichael-számok.

25. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$5040|n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n.$$

26. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$82!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{82}\right)$$

osztható 1992-vel.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 10. osztály 4. feladat »

27. Feladat. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözők és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege n. Bizonyítsuk be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n-nel.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1993. 9. osztály 1. feladat »

28. Feladat. Határozzuk meg azokat a csupa különböző számjegyből álló ötjegyű számokat, melyekre teljesül, hogy fordítottjuk is ötjegyű és mindketten oszthatók 275-tel.

29. Feladat. Határozzuk meg az n természetes szám értékét, ha $\frac{n+17}{n-3}$ is természetes.

« Zrínyi Ilona Matematikaverseny, döntő, 1992. 8. osztály »

30. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n és k relatív prímek, akkor $\binom{n-1}{k-1}$ osztható k-val.

31. Feladat. Határozzuk meg az n természetes szám értékét, ha $\frac{134n+2010}{134n-2010}$ is természetes.

32. Feladat. Igazoljuk, hogy egyetlen n pozitív egész szám esetén sem egyszerűsíthető:

(a) $\frac{3n+5}{7n+12}$,
(b) $\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$,
(c) $\frac{n!-1}{(n+1)!-1}$,
(d) $\frac{7^n-2}{7^{n+1}-5}$.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 10n^2 + 16}$$

tört nem egyszerűsíthető!

« VII. NMMV, Szabadka, 1998. ápr. 23-26., 10. osztály, 2. feladat »

34. Feladat. Igazoljuk, hogy $35|3^{6n}-2^{6n}(n\in\mathbb{N}^+)$.

35. Feladat. Igazoljuk, hogy $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$.

36. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számra igaz, hogy a $(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\dots\cdot(k+2000)$ szorzat osztható 2000^{99}-nel!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2000. 9. osztály 1. feladat »

37. Feladat. Bizonyítsa be, hogy 9^n-8n-1 osztható 64-gyel, ahol n nemnegatív egész szám.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2004. 11. osztály 1. feladat »

38. Feladat. Igazoljuk, hogy ha k páratlan, akkor $1+2+\ldots+n|1^k+2^k+\ldots+n^k$.

39. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n\geq 3$ egész szám, akkor

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)-1$$

osztható 2^n-nel!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2000. 11. osztály 4. feladat »

40. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996\,|\,2557^{2n+1}+1559^{2n+1}-4054^{2n+1}-62^{2n+1}$$

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1996. 10. osztály 1. feladat »

41. Feladat. Igazoljuk, hogy $n+4\nmid n^2+8n+15$.

42. Feladat. Igazoljuk, hogy ha

(a) $11|3a+4b$, akkor $11|a+5b$,
(b) $19|a-5b$, akkor $19|10a+7b$,
(c) $17|a-5b$, akkor $17|2a+7b$,
(d) $17|5a+2b$, akkor $17|9a+7b$,
(e) $16|12a-7b$, akkor $16|4a+23b$,
(f) $13|2a+b$ és $13|5a-4b$ akkor $13|a-6b$,
(g) $7|10a+b$, akkor $7|10b+2a$,
(h) $7|10b+2a$, akkor $7|10a+b$,
(i) $7|10a+b$, akkor $7|a-2b$,
(j) $7|a-2b$, akkor $7|10a+b$,
(k) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a héttel való oszthatóságra.)
(l) $7|100a+b$, akkor $7|a+4b$,
(m) $7|a+4b$, akkor $7|100a+b$,
(n) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a héttel való oszthatóságra.)
(o) $13|10a+b$, akkor $13|a+4b$,
(p) $13|a+4b$, akkor $13|10a+b$,
(q) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a tizenhárommal való oszthatóságra.)
(r) $17|10a+b$, akkor $17|a-5b$,
(s) $17|a-5b$, akkor $17|10a+b$,
(t) (Az előző két pont alapján fogalmazzunk meg szabályt a tizenhéttel való oszthatóságra.)
(u) $a+c|ab+cd$, akkor $a+c|ad+bc$,

(v) $a-c|ab+cd$, akkor $a-c|ad+bc$,

43. Feladat. Peti így okoskodik: a 728 osztható 7-tel, mert a 7 és a 28 is osztható 7-tel. Igaza van-e? Azaz igaz-e, hogy ha az $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}$ számra teljesül, hogy bárhogy is daraboljuk számunkat az elejéről kezdve, ha a kapott darabok oszthatók 7-tel, akkor a számunk is? Igaz-e a fentiek megfordítása?

44. Feladat. Van-e olyan természetes szám, amelynek az értéke megötszöröződik, ha az első számjegyét az elejéről töröljük, és a végére írjuk?

45. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy a fenti eljárással egy szám csak a háromszorosára nőhet (tehát kétszeresére, négyszeresére, hatszorosára, hétszeresére, nyolcszorosára, kilencszeresére sem).
(b) Keressük meg az összes, a fenti eljárással háromszorosára növő természetes számot.

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1988. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

46. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot melyre $n+1|n^2+1$

47. Feladat. Határozzuk meg azokat az n pozitív egész számokat, melyekre $n-3|n^3-3$.

48. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n egész, akkor $\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$ is egész.

49. Feladat. Igazoljuk, hogy ha tizenhárom egész szám összege osztható 6-tal, akkor a tizenhárom szám tizenharmadik hatványának összege is osztható 6-tal. Általánosítsunk!

« KöMaL C 629. »

50. Feladat. A 2018-at felbontottuk néhány egész szám összegére. Milyen maradékot ad 6-tal osztva a számok köbeinek összege?

« KöMaL Gy 3071. alapján »

51. Feladat. Igazoljuk, hogy három, öttel nem osztható szomszédos szám szorzatának valamelyik szomszédja öttel osztható.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1978., 9.osztály, 5. feladat »

52. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c különböző számjegyek, akkor

$$\overline{aabb} \nmid \overline{abcacb}.$$

53. Feladat.

(a) Igazoljuk, hogy egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írva 13-mal osztható hatjegyű számot kapunk.
(b) Milyen számot írhatunk még a 13 helyére, hogy a fenti oszthatóság továbbra is fennálljon?
(c) Gondolj egy kétjegyű szánra, majd vedd a fenti szám háromszori felírásával kapott hatjegyű számot. Oszd el a számot 3-mal, a hányadost 7-tel, a hányadost 13-mal. majd a hányadost 37-tel. Mit tapasztalsz? Miért?
(d) A fenti két feladat alapján találjunk ki mi is hasonló feladatokat.

54. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $37|\overline{abc}$, akkor $37|\overline{bca}$ illetve, $37|\overline{cab}$.

« »

55. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $27|\overline{abc}$, akkor $27|\overline{bca}$ illetve, $27|\overline{cab}$.

« »

56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $37|\overline{abcabc}$, akkor $37|\overline{bcabca}$ illetve, $37|\overline{cabcab}$.

« Kalmár László Matematikaverseny, megyei forduló, 1996. 8. osztály »

57. Feladat. Van-e olyan háromjegyű szám, amely egyenlő számjegyei szorzatának ötszörösével?

58. Feladat. Keressük meg azokat az ötjegyű számokat melyek számjegyeik szorzatának 45-szörösei.

59. Feladat.

(a) Tekintsünk két háromjegyű számot melyek különbsége osztható 7-tel. Igazoljuk, hogy ezen két szám egymás után írásával keletkező hatjegyű szám osztható 7-tel.
(b) Milyen számokat írhatunk a 7 helyére, hogy a feladat állítása továbbra is érvényben maradjon?

60. Feladat. Béla ismer egy oszthatósági szabályt a hatjegyű számok 37-tel való oszthatóságára. Szerinte egy hatjegyű szám akkor osztható 37-tel, ha az első három jegyéből álló háromjegyű számhoz hozzáadva az utolsó három számjegyéből képzett számot harminchéttel osztható számot kapunk. Igaza van-e Bélának?

« Kalmár László Matematikaverseny, döntő, 1994. 6. osztály, megyei forduló, 1995. 7. osztály »

61. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 10n^2 + 16}$$

tört nem egyszerűsíthető!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1998. 10. osztály 2. feladat »

62. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1997^{1999} + 1999^{1997}$ osztható 3996-tal.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 10. osztály 1. feladat »

63. Feladat. Osztható-e $20^{2008} + 16^{2008} - 3^{2008} - 1$ 323-al? Az állításodat igazold!

« NMMV 2008. 10/1 »

64. Feladat. Add meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1993-at megszorozva olyan többszörösét kapod, amelynek 1994 az utolsó négy jegye!

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1993. 3. forduló 2. feladat 7. osztályosok versenye »

65. Feladat. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 11. osztály 1. feladat »

3. Osztók száma

66. Feladat. Állítsuk elő a 2^n-t néhány egymást követő pozitív egész összegeként.

67. Feladat. Hányféleképp áll elő a 2010 néhány egymást követő pozitív egész összegeként?

« Kalmár László Matematikaverseny alapján »

68. Feladat. Határozzuk meg n-et, ha $n^3 + n^2 - 30n$-nek pontosan 8 osztója van.

69. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1, 2, \dots 2n$ számok közül $n+1$-et választva lesz a kiválasztott számok között kettő, melyek relatív prímek.

70. Feladat. Adjuk meg a legkisebb olyan pozitív egész számot amelynek

(a) 1,	(d) 4,	(g) 8,	(j) 20,
(b) 2,	(e) 5,	(h) 10,	(k) 24,
(c) 3,	(f) 6,	(i) 12,	(l) 100.

pozitív osztója van.

71. Feladat. Az n pozitív egész számnak 1996 pozitív osztója van. Igazoljuk, hogy n nem osztható 1995-tel.

« Gerőcs: Repeta matek »

72. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 4 pozitív egész osztója van, és ezen osztóinak összege 108.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2001. 9. osztály 5. feladat »

4. Négyzetszámok

73. Feladat. Igazold, hogy 7 darab különböző természetes szám négyzete között van két olyan, amelynek a különbsége 10-zel osztható.

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1989. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

74. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1, 11, 111, \dots$ sorozatban pontosan egy négyzetszám van.

75. Feladat. Hány négyzetszám van a $14, 144, 1444 \dots$ sorozatban?

76. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy négyzetszám utolsó számjegye 6, akkor az utolsó előtti páratlan.

« Varga Tamás Matematikaverseny, döntő, 1994/95., 7. osztály »

77. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy négyzetszám utolsó előtti számjegye páratlan, akkor utolsó számjegye 6.

« Arany Dániel Matematikai Taulóverseny, I. forduló, kezdők, 1995/96. »

78. Feladat. Igazoljuk, hogy négy szomszédos természetes szám szorzatához egyet adva, mindig négyzetszámot kapunk.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1975., 9.osztály, 5. feladat »

79. Feladat. $1156 = 34^2, 111556 = 334^2, 11115556 = 3334^2, 1111155556 = 33334^2, \ldots$ fogalmazzuk meg általános észrevételünket és bizonyítsuk is be.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1976., 12.osztály, 5. feladat, Kalmár Verseny 5. osztály »

80. Feladat. Tudjuk, hogy a, b, c olyan pozitív egészek, melyekre $a^2 + b^2 = c^2$. Igazoljuk, hogy ekkor

(a) $5|abc$
(b) $6|ab$
(c) $12|ab$.

81. Feladat. János és Ottó testvérek és eladták az összes CD lemezüket Andrásnak. Minden lemezért annyiszor 100 Ft-ot kaptak, mint ahány lemezük volt. András a vételárat 1000 Ft-osokban fizette ki, ameddig csak tudta, és csak a maradékot adta fémpénzben. Mivel a testvérek az 1000 Ft-okokat nem tudták egymás közt egyenlően felosztani, János eggyel többet kapott, míg Ottó kapta a fémpénzeket. János felváltott egy ezrest, s még odaadott néhány fémpénzt Ottónak, s így ugyanannyi pénzük lett. Hány forintot kapott Ottó Jánostól?

« Zrínyi Ilona Matematikaverseny, döntő, 1998. 6. osztály »

82. Feladat. Határozzuk meg az összes $n^2 + 6n$ alakú négyzetszámot.

« Szőkefalvi, 2009. »

83. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1997x^2 + 1998x + 1995$ semmilyen x egész szám esetén sem lesz teljes négyzet!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1997. 9. osztály 1. feladat »

84. Feladat. Igazoljuk, hogy ha n páratlan, akkor $n^3 + 1$ nem négyzetszám.

« Szőkefalvi, 2009. »

85. Feladat. Igazoljuk, hogy $1991^{1991} + 1992^{1992} + ... + 1996^{1996}$ nem négyzetszám.

« KöMaL F 3107. »

86. Feladat. Igazoljuk, hogy $n^{2k} + 1$ nem végződhet egynél több 0-ra.

87. Feladat.

(a) Adott 10 pozitív egész, melyek egyikének sincs 20-nál nagyobb prím osztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább egy, legfeljebb az összes) úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám.
(b) Adott 11 pozitív egész, melyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prím osztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább egy, legfeljebb az összes) úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám.

88. Feladat. Adott 48 pozitív egész szám, melyek szorzatának 10 különböző prím osztója van. Mutassuk meg, hogy van a számok között négy olyan, melyek szorzata négyzetszám.

89. Feladat. Legfeljebb hány különböző négyzetszám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 11-gyel?

« »

90. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege

(a) 2010
(b) 2018

91. Feladat. Igazoljuk, hogy öt szomszédos természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

92. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $3^{2000} + 4$ szám pozitív osztóinak száma összetett szám!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2003. 10. osztály 3. feladat »

93. Feladat.
(a) Igazoljuk, hogy 2003 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(b) Igazoljuk, hogy 2005 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(c) Igazoljuk, hogy 2007 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
(d) Igazoljuk, hogy 10^k+3 páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám, ahol $k \in \mathbb{Z}_0^+$.
(e) Igazoljuk, hogy $n \cdot 10^k + 3$ páratlan négyzetszám összege nem lehet négyzetszám, ahol $k > 2, \quad 1 \le n \le 9, \quad n, k, \in \mathbb{N}^+$.

94. Feladat. Keressük meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyzetszámot!

95. Feladat. Legfeljebb mekkora lehet a 2^n fokos szög szinusza, ha n pozitív egész?

« KöMaL B 3477. »

5. LNKO, LKKT

96. Feladat. Adjunk meg
(a) három,
(b) k

pozitív egész számot melyek legnagyobb közös osztója egy, de közülük semelyik kettő sem relatív prím.

97. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a és b relatív prímek, akkor

(a) $(a; a+b) = 1$,
(b) $(a; b^2) = 1$,
(c) $(b^2; a+b) = 1$,
(d) $(a^2; a-b^2) = 1$.

« Sárga »

98. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén $(2^n + 1, 2^n - 1) = 1$.

« Sárga »

99. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén $(2^n + 1, 4^n + 1) = 1$.

« Sárga »

100. Feladat. Igazoljuk, hogy $(a; b) = (a; a-b)$.

101. Feladat. Melyik ismert eljárás helyessége következik a fentiekből?

102. Feladat. Mely a pozitív egész számokra áll fenn, hogy
(a) $(a; 8) = 80$,
(b) $(a; 60) = 15$,
(c) $[a; 16] = 48$,
(d) $(a; 120) = [a; 24]$,

103. Feladat. Igazoljuk, hogy pozitív számokra $(a; b)\,[a; b] = ab$

104. Feladat. Mely n, k pozitív egészre teljesül, hogy

(a) $(n;k) = 13$ és $[n;k] = 2002$,
(b) $(n;k) = 26$ és $[n;k] = 4784$,
(c) $(n;k) = 13$ és $[n;k] = 2018$,
(d) $(n;k) = p$ és $[n;k] = pq^2$, (p, q prímek),
(e) $n + k = 13$ és $[n;k] = 720$,
(f) $n + k = 1323$ és $[n;k] = 147$,
(g) $(n;k) = 7$ és $n + k = 100$
(h) $a + b = 36(a;b)$ és $[a;b] = 3850$,
(i) $a + b = 370$, és $[a;b] = 270(a;b)$,
(j) $a + b = 667$, és $\frac{[a;b]}{(a;b)} = 120$.

« Sárga »

105. Feladat. Keressünk olyan pozitív egész számokat melyekre $[a;b] = a + b$.

106. Feladat. Oldjuk meg az $[a;b] + (a;b) = a + b + p$ egyenletet, ahol a, b pozitív egész, p pedig prím.

« Sárga »

107. Feladat. Mely k, l, m természetes számokra áll fenn, hogy $[k;l;m] = 60984, 88k = 9l$, és $11m = 2k$?

« Sárga »

108. Feladat. Tudjuk, hogy $(a;b) = 5$. Milyen értékeket vehet fel

(a) $(a + b; a - b)$
(b) $(a + 2b; 4a - b)$?

109. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^2$.

110. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számokat, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^2$.

111. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[2003;n] \leq (2003;n)^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ rögzített.

112. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[p;n] \leq (p;n)^2$, ahol p rögzített prím.

113. Feladat. Határozzuk meg azon n pozitív egész számok összegét, melyekre $[p;n] \leq (p;n)^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ és p prím rögzített.

114. Feladat. 49 természetes szám összege 999, határozzuk meg legnagyobb közös osztójuk legnagyobb értékét.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1985., 12.osztály, 5. feladat »

115. Feladat. Adottak az $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

« NMMV 1998. 11/3 »