Elemi matematika 1. - MTN224g

Prímek

1. Bevezető feladatok

1. Feladat. Hogyan segít az *Eratoszthenészi-szita* a prímek „kiszitálásában”?

2. Feladat. Három prímszám összege 2018. Lehet-e a szorzatuk 2031887?

3. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs két olyan szomszédos prímszám, melyek között pontosan 2018 összetett szám lenne. Általánosítsunk!

4. Feladat. Igazoljuk, hogy a prímszámok sorozatában tetszőleges nagy hézag lehet, azaz, hogy tetszőleges n természetes szám esetén megadható n egymást követő összetett szám.

5. Feladat. Lehet-e 2021 egymást követő pozitív egész szám összege prímszám? Általánosítsunk!

6. Feladat. Lehet-e $4k$ darab egymást követő egész szám összege prím?

7. Feladat. Írjuk le az $1, 2, 3, \ldots 40$ számokat olyan sorrendben, hogy bármely két szomszédos tag összege prím legyen.

8. Feladat. Van-e olyan háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit összeszorozva tízet kapunk?

« Varga Tamás Matematikaverseny, 1990. 1. forduló 4. feladat 6. osztályosok versenye »

9. Feladat. Keressük meg azokat a négyzetszámokat, amelyeket 11-gyel maradékosan osztva a hányados prímszám és a maradék 4.

10. Feladat. Legyen p_n az n-edik prímszám, és $N = p_n + p_{n+1}$ $(n > 1)$. Bizonyítsuk be, hogy N legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1993. 11. osztály 1. feladat »

11. Feladat. Az a összetett szám legkisebb valódi osztója nagyobb $\sqrt[3]{a}$-nál. Igazoljuk, hogy a két prímszám szorzata.

12. Feladat. Az ABC, C-ben derékszögű háromszögben $BC = p$, ahol p prímszám, az AC befogó hosszának számértéke a $k \cdot p$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, továbbá egész szám annak a négyzetnek az oldalhossza is, amelynek egyik csúcsa a C pont, a többi csúcsa az ABC háromszög oldalain van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet területe k^2-tel egyenlő!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2002. 9. osztály 4. feladat »

2. Egyenletek prímekre

13. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^q + 1 = r$ egyenletet.

14. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^2 - 2q^2 = 1$ egyenletet.

15. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a következő egyenletet:

$$p + p^2 + p^3 + q + q^2 + q^3 = 2393.$$

16. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán a

(a) $2p + 3q + 6r = 78$,
(b) $2p + 7q + 14r = 252$ egyenletet.
Általánosítsunk!

17. Feladat. Három prím szorzata az összegük
(a) ötszöröse,
(b) tizenkétszerese,
(c) tizenháromszorosa,
(d) n-szerese.
Határozzuk meg ezeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1985., 9.osztály, 2. feladat »

18. Feladat. Oldjuk meg a prímek halmazán: $8^p + p^2 = q$.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy nincsenek olyan különböző prímek, melyek reciprokai (legalább 3 tagú) számtani sorozatot alkotnak.

20. Feladat. Milyen p és q prímszámokra teljesül a $3(p^2 - q) = q^2 - p$ egyenlet?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1999. 9. osztály 1. feladat »

21. Feladat. Oldjuk meg a pozitív prímszámok halmazán a következő egyenletet: $3x^2+6x = 2y^2 + 7y$.

« NMMV 1993. 10/3 »

22. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs kizárólag prímekből álló pithagoraszi-számhármas, azaz a $p^2 + q^2 = r^2$ egyenletnek nincs megoldása a prímek halmazán.

3. Oszthatósági feladatok prímekre

23. Feladat. Keressük meg az összes olyan p prímet melyre
(a) $8p^2 + 1$,
(b) $2018p^2 + 1$ prím.
Általánosítsunk!

24. Feladat. Rendezzük sorba az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyeket, hogy a kapott hatjegyű szám prím legyen.

« »

25. Feladat. A kétjegyű számokat 35-től 42-ig egymás mellé írjuk tetszés szerinti sorrendben. Hány prímszám van az így kapható 16 jegyű számok között?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2001. 9. osztály 4. feladat »

26. Feladat. Van-e olyan n természetes szám, melyre $2018^n - 1$ és $2018^n + 1$ is prím? Általánosítsunk!

27. Feladat. Igazoljuk, hogy egy háromnál nagyobb prímszám négyzeténél eggyel kisebb szám mindig osztható 24-gyel.

28. Feladat. Két prímről tudjuk, hogy az összegük is prím, valamint, hogy az összegük és a szorzatuk szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg ezeket a prímeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1987., 10.osztály, 5. feladat »

29. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 5-nél nagyobb prímszám, akkor p^4-q^4 osztható 60-nal!

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1997. 10. osztály 3. feladat »

30. Feladat. Keressük meg az összes olyan p prímet melyre

(a) $p+10, p+110, p+1110$,
(b) $p+10, p+14$,
(c) $p+2, p+6, p+8, p+14$,
(d) $10p-1, 10p+1$ is prím.

31. Feladat. Mely p pozitív prímszámokra lesz $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$, $6p+1$ mindegyike prímszám?

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1992. 9. osztály 2. feladat »

32. Feladat. Igazoljuk, hogy ha p és p^2+8 prím, akkor p^2+p+1 és p^2+3p+1 is az. Találjunk ki mi is hasonló feladatokat!

33. Feladat. András és Béla egyaránt elmúltak már 5 évesek, és mindkettőjük életkora prímszám, sőt ha András annyi idős lesz, mint Béla most, akkor Béla életkora ismét prím lesz. Igazoljuk, hogy akkor, amikor András született, Béla életkora osztható volt 6-tal.

34. Feladat. Hány olyan p prím van, melyre nem teljesül tetszőleges a egész szám esetén, hogy

$$p|(a+1)^2+(a+2)^2+\ldots+(a+p)^2$$

« Pest Megyei Matematikaverseny »

35. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan p, q prímszámot, melyre az $x^2-qx+p=0$ egyenlet gyökei egészek.

36. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $p+q$ és p^2+q^2-q is prím.

37. Feladat. Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre a $p+q$ és $p^2+q^2-p-q-1$ is prím.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2007. 10. osztály 4. feladat »

38. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $pq-1$ és $pq+1$ is prím.

39. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha p és q háromnál nagyobb prímszám, akkor $7p^2+11q^2-39$ nem prímszám.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2004. 9. osztály 6. feladat »

40. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor p^2+7q^2-23 nem prímszám.

« Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1995. 10. osztály 2. feladat »

41. Feladat. Mely n természetes szám esetén lesz prím a(z)

(a) n^4+4n^2+3,
(b) n^3+3n^2+n+3,

(c) $n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$,
(d) $n^3 - 2n^2 - 4n + 8$,
(e) $25^n + 2 \cdot 5^n + 1$,
kifejezés értéke?

42. Feladat. Keressük meg az $a^4 + 4$ $(a \in \mathbb{N})$ alakú prímeket.

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1976., 9.osztály, 5. feladat »

43. Feladat. Keressük meg mindazokat a p prímeket, melyekre $2p + 1$ köbszám.

« Szőkefalvi, 2009. »

44. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a p, q prímeket, melyekre $p^q + q^p$ is prím.

45. Feladat. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy $34a = 43b$. Mutassuk meg, hogy $a + b$ nem prím.

« KöMaL B 3293. »

46. Feladat. Keressük meg azokat a p prímeket, amelyekre a $p^2 + 11$ számnak pontosan 6 pozitív osztója van.

47. Feladat. Minden pozitív egész n-re jelölje A_n azon pozitív egészek halmazát, amelyek nem relatív prímek n-hez. Milyen n-ekre következik $x, y \in A_n$-ből, hogy $(x + y) \in A_n$?

« KöMaL Gy 3151. »

48. Feladat. Igazoljuk, hogy az egész számok körében a felbonthatatlanként definiált prímek rendelkeznek a prímtulajdonsággal.

4. Kirándulás Párosországba

Az alábbiakban képzeljük el, hogy egy olyan országba tévedtünk, ahol csak a páros számokat ismerik: $2, 4, 6, \ldots$. Itt az összeadás, kivonás, szorzás művelet a szokásoknak megfelelően elvégezhető, mert páros számok összege, különbsége, szorzata is páros.

49. Feladat. Igazoljuk, hogy a Párosországban végzett maradékos osztás során a maradék lehet ugyanakkora, sőt nagyobb is, mint az osztó.

50. Feladat. Mik itt a felbonthatatlanok? (A pozitív egészek halmazában a q szám felbonthatatlan, ha $q = ab$-ből következik, hogy $q = a$, vagy $q = b$.

51. Feladat. Igazoljuk, hogy itt nem igaz, hogy egy nem felbonthatatlan szám lényegében egyértelműen bontható felbonthatatlanok szorzatára.

52. Feladat. Mik a prímek? (A pozitív egész számok halmazában a $p, (p > 1)$ prím, ha rendelkezik a prím tulajdonsággal, azaz ha $p|ab \Rightarrow p|a$ vagy $p|b$.) Az egész számok gyűrűjében a prímeket a hagyományos értelemben felbonthatatlanként kezeljük, és ezt meg is tehetjük mert a prímek és a felbonthatatlanok euklideszi gyűrűben egybeesnek, de ez általában nem igaz. Az igaz, hogy ha egy I integritástartományban a szorzásnak nincs egységeleme akkor nincsenek I-ben prímek, és az is, hogy ha egy I integritástartományban a szorzásnak van egységeleme, akkor a prímek szükségképpen felbonthatatlanok is. Gauss-gyűrűkben már az is igaz, hogy az felbonthatatlanok prímek.

5. Prímekkel kapcsolatos tételek, „nevezetes" prímek

Ikerprímek

53. Feladat. Határozzuk meg azokat a p és q ikerprímszámokat, amelyekre $p^2 - pq + q^2$ is prím. (A p és q prímszámok ikerprímek, ha $|p - q| = 2$.)

« KöMaL C 346. »

54. Feladat. Igazoljuk, hogy a 3-nál nagyobb $(p; q), (r; s)$ ikerprímek esetén $12|qs - pr$.

55. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a $p, q > 2$ prímekre p^2q és q^2p összegének és különbségének hányadosa egész, akkor az osztható 6-tal.

Fermat-számok

56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor szükségképpen n kettőhatvány. (Ezek az ún. Fermat-számok, illetve Fermat-prímek.) Igaz-e az állítás megfordítása?

57. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely két Fermat-szám relatív prím, azaz bármely $n > m \geq 0$ egész számok esetén $2^{2^n} + 1$ és $2^{2^m} + 1$ relatív prímek.

58. Feladat. Az előző feladat eredményének segítségével igazoljuk, hogy végtelen sok prím van. (Pólya György)

59. Feladat. Igazoljuk, hogy ha F_n jelöli az n-edik Fermat-számot, akkor $F_{n+1} = F_n(F_n - 2) + 2$

60. Feladat. Igazoljuk, hogy ha F_n jelöli az n-edik Fermat-számot, akkor $F_{n+1} = F_1 F_2 \dots F_n + 2$.

Mersenne-prímek

61. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2^p - 1$ prím, akkor szükségképpen p prím. (Ezek az ún. Mersenne-prímek.) Igaz-e az állítás megfordítása? Járjunk utána, mi is az a GIMPS.

Csebisev-tétel

Csebisev-tétel: Bármely n pozitív egész szám esetén létezik p prímszám, hogy $n < p \leq 2n$.

62. Feladat. Igazoljuk, hogy Csebisev-tételéből következik, hogy ha $n > 4$, akkor n és $2n$ között van olyan természetes szám, amely két különböző prím szorzata.

63. Feladat. Igazoljuk, hogy Csevisev-tételből következik a következő tétel: Ha $n > 1$, akkor $n!$ prímtényezős alakjában van legalább egy olyan prímtényező amely az első hatványon szerepel.

Dirichlet-tétel

Dirichlet-tétel: Ha az a, b pozitív egészekre $(a; b) = 1$, akkor az $a, a + b, a + 2b, \dots$ sorozatban végtelen sok prím van.

64. Feladat. Igazoljuk Dirichlet tételének felhasználásával, hogy tetszőleges n pozitív egész számhoz létezik olyan p prímszám, hogy p-nek legalább n számú jegye 0.

Tökéletes, bővelkedő és hiányos számok

Tökéletes, bővelkedő és hiányos számok: Jelölje $s(n)$ az $n > 1$ pozitív egész szám önmagánál kisebb osztóinak az összegét. Így $s(2) = 1, s(3) = 1, s(4) = 3, s(5) = 1, s(6) = 6, \ldots, s(12) = 15$. Ha $s(n) < n$, azt mondjuk, hogy n *hiányos szám*, ha $s(n) > n$, akkor n *bővelkedő szám*, s ha $s(n) = n$, akkor n-t *tökéletes szám*nak nevezzük.

65. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy páros szám $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím, akkor tökéletes.

Megjegyzés: Igaz a fenti tétel megfordítása is, vagyis tudjuk, hogy egy páros szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím alakú.

66. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám a kettes számrendszerben 1...10...0 alakú, ahol eggyel kevesebb 0 van, mint 1-es.

67. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám háromszögszám. (Egy pozitív egész szám háromszögszám, ha valamely pozitív egész n-re $1 + 2 + \ldots + n$ alakú.)

68. Feladat. Igazoljuk, hogy a tökéletes számok (pozitív) osztóinak reciprokösszege 2.

69. Feladat. Igazoljuk, hogy egy $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú tökéletes szám (pozitív) osztóinak száma $2p$.

70. Feladat. Igazoljuk, hogy minden páros tökéletes szám harmonikus. (Egy pozitív egész szám harmonikus, ha osztóinak harmonikus közepe egész.)

71. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) a prímek hiányosak,
(b) a prímhatványok hiányosak,
(c) ha az n páratlan számnak csak két prímosztója van, akkor n hiányos.

72. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n = 2^{p-1}$, ahol $2^p - 1$ Mersenne-prím, akkor n szupertökéletes. (A k szupertökéletes, ha $\sigma(\sigma(k)) = 2k$, ahol σl jelöli l összes osztóinak összegét.)

Megjegyzés: Igaz az állítás megfordítása is.

Prímeket adó polinomok

73. Feladat. *Euler* olyan egész együtthatós polinomot talált

$$f(x) = x^2 + x + 41$$

amely 40 egymást követő egész helyen prímet ad ($x = 0, 1, 2, \ldots 39$.) Miért nem működik tovább az $x = 40, 41$ helyeken?

74. Feladat. *Escott* polinomja, 1899-ből a:

$$g(x) = x^2 - 79x + 1601$$

az $x = 0, 1, 2, \ldots 79$ értékekre prímet ad. Igazoljuk, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom amely minden pozitív egész helyen prímet ad.

További nevezetes prímek

75. Feladat. Keressünk az alábbi nevezetes tulajdonságokkal rendelkező prímeket!
(a) Az olyan prímszámot nevezzük *balról csonkolható*nak, amelynek (tízes számrendszerben) balról elhagyva a kezdő számjegyeit mindig prímet kapunk.

(b) Az olyan prímszámot nevezzük *jobbról csonkolható*nak, amelynek (tízes számrendszerben) jobbról elhagyva a záró számjegyeit mindig prímet kapunk.
(c) A p prímet *biztonságos*nak nevezzük, ha $\frac{p-1}{2}$ is prím.
(d) Azt mondjuk, hogy a p prím *Sophie Germain-prím*, ha $2p+1$ is prím.
(e) A *Bölcsföldi-Birkás prímek* olyan prímszámok, melyek minden számjegye prím, a számjegyek száma prím, és a számjegyek összege is prím.
(f) *Fibonacci-prím*ek a Fibonacci-sorozat prím elemei.
(g) *Csillag-prímek* a $6n(n-1)+1$ alakú prímek. (Miért hívjuk így őket?)
(h) *Euklideszi-prímek* azok a prímek melyek $\Pi p_n + 1$ alakban írhatók, ahol Πp_n az első n prím szorzata.
(i) *Mírpszámok (emirp)* azok a nem palindrom prímek, melyeket visszafele olvasva is prímet kapunk.
(j) *Palindrom prímek* azok a prímek melyek visszafele olvasva önmagukat adják.
(k) *Permutálható prímek* azok a prímek, melyek jegyeinek tetszőleges sorrendje prímet ad.
(l) *Pierpont-prímek* a $2^n 3^m + 1$ alakú prímek.
(m) *Prímnégyesek* A $(p; p+2; p+6; p+8)$ rendezett négyesek, ahol mind a négy szám prím.
(n) *Thabit-prímek* A $3 \cdot 2^n - 1$ alakú prímszámok.
(o) *Wagstaff-prímek* A $\frac{2^n+1}{3}$ alakú prímszámok.
(p) *Wilson-prímek* Olyan p prímszámok, amelyekre $p^2 | (p-1)! + 1$.