EUKLIDÉSZI GEOMETRIA GYAKORLÓ FELADATOK

KOZMA JÓZSEF

1. Blokk

Definíció 1.1. Illeszkedési síknak nevezzük a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ hármast, ahol

(i) $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ halmazok,
(ii) $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$,
(iii) $\mathcal{P} \cup \mathcal{L} \neq \emptyset$, és
(iv) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

Feladat 1. Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ illeszkedési sík. Nevezzük $\mathcal{P}$-t pontok halmazának, $\mathcal{L}$-et egyenesek halmazának, $\mathcal{I}$-t pontok és egyenesek közti illeszkedési relációnak! Pont és egyenes illeszkedésére használjuk a a következő kifejezéseket is: a pont rajta van az egyenesen, az egyenes átmegy a ponton.

(a) Milyen geometriai jelentése van a definíciónak, ha ezeket az elnevezéseket használjuk?
(b) Tekinthető-e az illeszkedési sík axiomatikus rendszernek?
(c) Ha igen, adjuk meg az alapfogalmakat és az axiómákat!

Definíció 1.2. Nevezzük részleges (kezdetleges) síknak a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ illeszkedési síkot, ha kielégíti a következő K1. axiómát.

K1. Axióma. *Két ponton legfeljebb egy egyenes megy át.*

Jelölés. Egy síkra használjuk a Σ jelölést, vagyis: $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

Feladat 2. Ha a és b a Σ részleges sík különböző egyenesei, akkor legfeljebb egy olyan pont van, amely mindkét egyenesre illeszkedik.

Feladat 3. Legyenek a és b a Σ részleges sík különböző egyenesei. Igaz-e, hogy

(a) mindkét egyenesre illeszkedik pont?
(b) a síkon legalább egy egyenesre illeszkedik legalább 2 pont?
(c) van olyan pont, amelyiken nem megy át egyenes?
(d) van olyan pont, amelyiken megy át egyenes?
(e) minden ponton megy át egyenes?

Feladat 4. Nevezzük elemi síknak a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ részleges síkot, ha (a K.1. axiómán túl) kielégíti a következő K2. axiómát.

K2. Axióma. *Minden egyenes átmegy legalább két különböző ponton.*

Feladat 5. Igaz-e, hogy az elemi síkon
(a) bármely két különböző pont illeszkedik egy egyenesre?
(b) van három nem egyenesre illeszkedő pont?
(c) van legalább két egyenes?
(d) van legalább két különböző pont?

Definíció 1.3. Affin illeszkedési síknak nevezzük a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ síkot, ha kielégíti a következő axiómákat.

I0. Axióma. *Létezik három nem kollineáris pont (vagyis amely nem illeszkedik egy egyenesre).*

I1. Axióma. *Minden egyenesre illeszkedik legalább két pont.*

I2. Axióma. *Bármely két különböző pont pontosan egy egyenesre illeszkedik.*

I3. Axióma. *Ha l egy egyenes, és P egy rá nem illeszkedő pont, akkor van pontosan egy olyan m egyenes, amely átmegy a P ponton, és nincsen közös pontja az l egyenessel (ilyenkor azt mondjuk, hogy párhuzamosak).*

Feladat 6. Mutassuk meg, hogy az affin sík I1. axiómája következik a másik három axiómából.

Feladat 7. Mutassuk meg, hogy egy affin illeszkedési sík egy részleges sík!

Feladat 8. Igaz-e, hogy minden affin illeszkedési sík elemi sík?

Definíció 1.4. Projektív illeszkedési síknak nevezzük a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ síkot, ha kielégíti a következő axiómákat.

P1. Axióma. *Bármely két különböző pont pontosan egy egyenesre illeszkedik.*

P2. Axióma. *Bármely két egyenes pontosan egy ponton megy át.*

P3. Axióma. *Létezik négy olyan pont, amelyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre (négy általános helyzetű pont.)*

Feladat 9. Legyenek a $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ egy illeszkedési sík alaphalmazai. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes halmazok alábbi megadásaival milyen síkok jönnek létre! A feladatban $[x, y, z]$ azoknak a valós (rx, ry, rz) számhármasoknak az osztályát jelöli, ahol $r \neq 0$, $\langle a, b, c\rangle$ azoknak a valós (ra, rb, rc) számhármasoknak az osztályát jelöli, ahol $r \neq 0$,

(i) $\mathcal{P} = \{P\}$, $\mathcal{L} = \{l\}$, $\mathcal{I} = \emptyset$.
(ii) $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S\}$, $\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{I} = \emptyset$.
(iii) $\mathcal{P} = \{P, Q\}$, $\mathcal{L} = \{l\}$, $\mathcal{I} = \{(P, l), (Q, l)\}$.
(iv) $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, $\mathcal{L} = \{l, m, n\}$, $\mathcal{I} = \{(P, l), (Q, l), (P, m), (R, m), (Q, n), (R, n)\}$.
(v) $\mathcal{P} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$, $\mathcal{L} = \{\{(x, y) : ax+by+c = 0\}$ valamely a, b, c valós számokra, a $b = c = 0$ nem teljesül$\}$, $\mathcal{I} = \{(P, l) : P \in l\}$.
(vi) $\mathcal{P} = \{[x, y, z] : x, y, z \in \mathbf{R}$, és $x = y = z = 0$ nem igaz$\}$, $\mathcal{L} = \{\langle a, b, c\rangle : a, b, c \in \mathbf{R}$, és $a = b = c = 0$ nem igaz$\}$, $\mathcal{I} = \{([x, y, z], \langle a, b, c\rangle) : ax + by + cz = 0\}$.

Válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

a) A síkok közül melyik részleges illeszkedési sík?
b) A síkok közül melyik elemi illeszkedési sík?
c) A síkok közül melyik affin illeszkedési sík?
c) A síkok közül melyik projektív illeszkedési sík?

Feladat 10. Mutassuk meg, hogy minden affin illeszkedési síkon igaz a P3. Axióma.

Feladat 11. Legyen $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ a következő:

- $\mathcal{P} = \{$a Descartes-féle koordinátákkal ellátott euklideszi sík pontjai $\}$,
- $\mathcal{L} = \{$ az $y = (x+a)^2 + b$ egyenletű parabolák és az $x = c$ egyenletű egyenesek pontjai, ahol $a, b, c \in \mathbf{R}\}$,
- $\mathcal{I}$ az illeszkedő pontok és parabolák, illetve vertikális egyenesek halmaza.

Mutassuk meg, hogy S affin illeszkedési sík!

Feladat 12. Az affin síkon ha két egyenes metszi egymást, akkor van-e olyan egyenes, amelyik mindkettővel párhuzamos?

Feladat 13. Mutassuk meg, hogy ha az affin síkon egy egyenes metszi két párhuzamos egyikét, akkor metszi a másikat is.

Feladat 14. Négy páronként metsző egyenesnek összesen hány metszéspontja van az affin síkon?

Feladat 15. Mit értünk azon, hogy két különböző pont meghatároz egy egyenest?

Definíció 1.5. Affin illeszkedési térnek nevezzük a következő rendszert. Adottak a $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{S}$ halmazok, ahol $\mathcal{L}$ és $\mathcal{S}$ elemei a $\mathcal{P}$ részhalmazai, amelyeket egyeneseknek és síkoknak nevezünk. Pont és egyenes, illetve sík illeszkedése azt jelenti, hogy a pont eleme az adott halmaznak. Ha egy egyenes (mint ponthalmaz) részhalmaza egy síknak (mint ponthalmaznak), akkor azt mondjuk, hogy az egyenes és a sík illeszkedik.

I_1 Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
I_2 Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
I_3 Három nem kollineáris pontra pontosan egy sík illeszkedik.
I_4 Ha egy egyenes két különböző pontja egy síkra illeszkedik, akkor az egyenes minden pontja a síkra illeszkedik.
I_5 Ha két síknak van közös pontja, akkor létezik legalább még egy ettől különböző közös pont is.
I_6 Létezik négy olyan pont, amely nem illeszkedik közös síkra.
I_7 (Párhuzamossági axióma) Minden egyeneshez és rajta kívüli ponthoz pontosan egy olyan egyenes létezik, amely benne van az egyenest tartalmazó valamely síkban, illeszkedik a pontra, és nem metszi az egyenest.

Feladat 16. Milyen lehet síkok kölcsönös helyzete az affin térben?

(a) Két síké?
(b) Három síké?
(c) Négy síké?

Feladat 17. Milyen lehet két egyenes kölcsönös helyzet az affin térben?

Feladat 18. Milyen lehet egy egyenes és egy sík kölcsönös helyzete az affin térben?

Feladat 19. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben egy sík párhuzamos két metsző sík metszésvonalával, akkor a két síkot párhuzamos egyenesekben metszi.

Feladat 20. Mutassuk meg, hogy az affin térben affin térben pontosan egy olyan sík van, amelyik illeszkedik egy pontra és egy rajta át nem menő egyenesre!

Feladat 21. Mutassuk meg, hogy az affin térben két különböző párhuzamos egyenesre pontosan egy sík illeszkedik!

Feladat 22. Mutassuk meg, hogy az affin térben két metsző egyenesre pontosan egy sík illeszkedik!

Feladat 23. Mutassuk meg, hogy a síkok párhuzamossága az affin térben ekvivalenciareláció.

Feladat 24. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben egy sík metszi két párhuzamos sík egyikét, akkor metszi a másikat is.

Feladat 25. Mutassuk meg, hogy az affin térben egy sík párhuzamos síkokat párhuzamos egyenesekben metsz.

Feladat 26. Milyen lehet három egyenes kölcsönös helyzete az affin térben?

Feladat 27. Igaz-e, hogy ha az affin térben az a és b kitérő egyenesek, akkor az a-val párhuzamos és b-t metsző egyenesek egy síkban vannak.

Feladat 28. Milyen lehet egy egyenes és egy sík kölcsönös helyzete az affin térben?

Feladat 29. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben egy egyenes metszi két párhuzamos sík egyikét, akkor metszi a másikat is.

Feladat 30. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben egy sík párhuzamos két metsző sík metszésvonalával, akkor a két síkot párhuzamos egyenesekben metszi.

Feladat 31. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben két egyenes kitérő, akkor pontosan egy olyan sík van, amely illeszkedik az egyik egyenesre, és párhuzamos a másik egyenessel.

Feladat 32. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben két egyenes kitérő, akkor pontosan egy párhuzamos síkpár van, amelyek közül az egyik az egyik egyenesre illeszkedik, a másik a másik egyenesre.

Feladat 33. Mutassuk meg, hogy az affin térben vannak kitérő egyenesek!

Definíció 1.6. Az affin síkban a párhuzamos egyenesek ekvivlenciaosztályait *ideális pontoknak* nevezzük, az ideális pontok halmazát *ideális egyenesnek*. Az affin térben a párhuzamos egyenesek ekvivlenciaosztályait *ideális pontoknak* nevezzük, az ideális pontok halmazát *ideális síknak*, az egy síkra illeszkedő ideális pontok halmazát *ideális egyeneseknek* nevezzük (kivéve az ideális síkra illeszkedő pontok halamazát). Egy ideális pont illeszkedik egy síkra, ha a sík tartalmazza az ideális ponthoz mint osztályhoz tartozó valamelyik párhuzamos egyenest.

Feladat 34. Legyenek P^i ideális pont, S egy sík a térben, a és b az S sík egyenesei. Igaz-e a következő állítás? $P \in S \Leftrightarrow P^i \in a, P^i \in b,$ és $a \neq b$.

Feladat 35. Mutassuk meg, hogy ha S-et a metsző a és b egyenesek határozzák meg, akkor $S = \bigcup_\alpha a_\alpha$, ahol $a_\alpha \parallel a$, és a_α metszi b-t.

Feladat 36. Igaz-e, hogy a térben az ideális egyenesek a síkoknak az ideális síkkal vett metszetei?

Feladat 37. Mit mondhatunk azokról a síkokról, amelyeknek közös az ideális egyenesük?

Feladat 38. Igaz-e, hogy egy síkot meghatároz egy ideális és két nem ideális pontja?

Feladat 39. Tekinthetjük-e az affin térben ideális egyeneseknek a párhuzamos síkok ekvivalenciaosztályait?

Feladat 40. Fejtsük ki a következő fogalmak tartalmát! (a) állítás, (b) definíció, (c) axióma, (d) alapfogalom, (e) tétel, (f) definiált fogalom, (g) axiomatizálás, (h) definiálás, (h) bizonyítás, (i) axiómarendszer, (j) axiomatikus rendszer, (k) reláció.

Feladat 41. Mi a különbség (hasonlóság) az axiómarendszer és az axiomatikus rendszer között?

Feladat 42. Mi a kapcsolat az alapfogalmak és az axiómák között?

Feladat 43. Mit értünk egy axiomatikus rendszer modelljén?

Feladat 44. Mikor tekintünk egy axiómarendszert geometriainak?

Feladat 45. Honnan tudjuk, hogy egy fogalom milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

Feladat 46. Honnan tudjuk, hogy egy alapfogalom milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

Feladat 47. Mit értünk azon, hogy egy állítás következik egy másik állításból?

Feladat 48. Hogyan állapítható meg, hogy egy állítás igaz vagy hamis?

Feladat 49. Mit értünk indirekt feltevésen? Adjunk rá példát!

Feladat 50. Hozzuk "ha..., akkor ..." alakúra a következő állításokat!

(a) Egy háromszög mindhárom oldalát nem metszheti ugyanaz az egyenes.
(b) Egy nemelfajuló paralelogramma átlói metszik egymást.
(c) Az affin sík nem párhuzamos egyenesei metszik egymást.

Feladat 51. Mit értünk egy állítás megfordításán? Adjunk rá geometriai példát!

Feladat 52. Mikor nevezünk két állítást ekvivalensnek? Adjunk rá geometriai példát!

Feladat 53. Mit értünk egy állítás tagadásán? Hozzunk rá példát a geometriából!

Feladat 54. Tagadjuk a következő állításokat!
(a) Minden egyenesen van legalább két különböző pont.
(b) Van három olyan pont, amely nincsen egy egyenesen.
(c) Az egyenesek párhuzamossága ekvivalenciareláció.

Jelölés. Az A kezdőpontú, C-n átmenő nyílt félegyenest $\overrightarrow{AC}$-vel jelöljük.

Feladat 55. Mit értünk azon, hogy egy pont egy egyenest két (nyílt) félegyenesre oszt?

Feladat 56. Mit értünk két különböző pont összekötő szakaszán?

Feladat 57. Mutassuk meg, hogy az egyeneseken a pontok elválasztásának tulajdonsága nem függ az egyenesen a rendezés választásától!

Definíció 1.7. Ha adott az S síkon a g egyenes, akkor a g egyenesen kívüli pontokat g-partosnak hívjuk, ha összekötő szakaszuk nem metszi g-t.

Feladat 58. Mutassuk meg, hogy a partosság a síkon olyan reláció egy egyenesen kívüli pontok halmazán, amely (a) reflexív, (b) szimmetrikus, (c) tranzitív. (Vagyis a g-partosság ekvivalenciareláció az S sík $S \setminus g$ halmazán.)

Feladat 59. Adjunk (geometriai) példákat olyan ekvivalenciarelációra, amelyeknek
(a) egy osztálya van,
(b) két osztálya van,
(c) végtelen sok osztálya van!

Feladat 60. Mutassuk meg, hogy minden nyílt szakasznak van pontja!

Feladat 61. Mit értünk azon, hogy egy félegyenest kezdőpontja és egy tetszőleges pontja meghatározza?

Feladat 62. Legyen a és b két metsző egyenes: $a \cap b = M$. Mutassuk meg, hogy ekkor az a egyenes M kezdőpontú nyílt félegyenesei közül az egyik a b egyenes egyik nyílt félsíkjában van, a másik a b egyenes másik félsíkjában van.

Feladat 63. Mit értünk az affin sík transzformációján?

Feladat 64. Adjunk példát olyan egyenességtartó leképezésre, amely nem egyenestartó!

Feladat 65. Mit nevezünk az affin síkon paralelogrammának, elfajult paralelogrammának?

Feladat 66. A affin sík axiómáinak felhasználásával mutassuk meg, hogy a paralelogrammák átlói metszik egymást.

Feladat 67. Mutassuk meg, hogy a paralelogramma átlói p-relációban álló szakaszokra bontják egymást! Ezt a tulajdonságot fejezhetjük ki úgy, hogy a paralelogramma átlói "felezik egymást".

Feladat 68. Legyenek adottak a síkban a metsző OX és OY egyenesek, továbbá az egyikre sem illeszkedő kollineáris A, B, C ponthármas. Egy az A ponton átmenő egyenes messe OX-et az M, OY-t az N pontban. Legyen továbbá a BM és CN egyenesek metszéspontja P. Mi lesz a P pontok mértani helye, ha minden az A ponton átmenő egyenest számba veszünk?

Feladat 69. A sík különböző l, m, n egyenesei átmennek az O ponton, a különböző A, B, C pontok ezek egyikére sem illeszkednek. Szerkesszünk olyan $LMN\triangle$ háromszöget, melynek csúcsai rendre illeszkednek a megadott egyenesekre, oldalai pedig átmennek a megadott pontokon!

2. Blokk

Feladat 70. Mutassuk meg, hogy az affin síkon minden egyenesnek legalább két nyílt félsíkja van!

Feladat 71. Mutassuk meg, hogy az affin síkon minden egyenesnek legfeljebb két nyílt félsíkja van!

Feladat 72. Mutassuk meg, hogy az affin térben (definíciója TK. 14. o.) minden síknak legalább két nyílt féltere van!

Feladat 73. Mutassuk meg, hogy az affin térben minden síknak legfeljebb két nyílt féltere van!

Feladat 74. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{S}$ affin síkon az A pont a g egyenesen van, a B pont rajta kívül, akkor az $l_A^+(B)$ nyílt félegyenes a sík g-nek B-t tartalmazó nyílt félsíkjában van.

Feladat 75. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben az A pont a γ síkon van, a B pont rajta kívül, akkor az $l_A^+(B)$ nyílt félegyenes a tér γ-nak B-t tartalmazó nyílt félterében van.

Feladat 76. Mutassuk meg, hogy ha az affin térben az a egyenes a γ síkon van, a B pont rajta kívül, akkor az $\alpha_a^+(B)$ nyílt félsík a tér γ-nak B-t tartalmazó nyílt félterében van.

Feladat 77. (Azonos a 44. feladattal.) Az affin síkon messe az l egyenes a g egyenest az M pontban. Mutassuk meg, hogy akkor az l-nek az egyk M kezdőpontú félegyenese a g egyik, másik félegyenese a másik partján van!

Feladat 78. Messe az affin térben a γ és az α sík egymást az m egyenesben. Mutassuk meg, hogy az α sík a határoló egyenesű egyik nyílt félsíkja a γ egyik nyílt félterében van, a másik nyílt félsíkja a γ másik nyílt félterében van!

Feladat 79. Az affin síkban mi lehet a metszete
(a) két nyílt félegyenesnek?
(b) egy egyenesnek és egy nyílt félegyenesnek?
(c) egy egyenesnek és egy nyílt félsíknak?
(d) egy nyílt félegyenesnek és egy nyílt félsíknak?
(e) két nyílt félsíknak?

Feladat 80. Az affin térben mi lehet a metszete
(a) két egyenesnek?
(b) két nyílt félegyenesnek?
(c) egy egyenesnek és egy nyílt félegyenesnek?
(d) egy egyenesnek és egy nyílt félsíknak?
(e) egy nyílt félegyenesnek és egy nyílt félsíknak?
(f) két síknak?
(g) két nyílt félsíknak?
(h) egy síknak és egy nyílt félsíknak?

Feladat 81. Mutassuk meg, hogy bármely nyílt szakasz egyértelműen előáll két nyílt félegyenes metszeteként!

Feladat 82. Mutassuk meg, hogy egy $PQRS$ paralelogramma átlóinak T metszéspontjára (P,T) és (T,R), valamint (Q,T) és (T,S) p-relációban állnak egymással! (Tétel a TK. 21. ooldalán)

Feladat 83. Mutassuk meg, hogy az $\overline{AB}$ nyílt szakasznak pontosan egy olyan F pontja van, amelyre (A,F) és (F,B) p-relációban állnak egymással!

Feladat 84. Affin szabályos hatszögnek nevezünk egy $ABCDEF$ hatszöget, amelynek szemközti oldalai egy paralelogramma szemközti oldalai. Szerkesszünk affin szabályos $ABCDEF$ hatszöget, amelynek adott az A és B csúcsa!

Feladat 85. Mutassuk meg, hogy az affin szabályos hatszög szemközti csúcsait összekötő átlói egy pontban metszik egymást!

Feladat 86. Affin szabályos sokszögnek nevezünk egy $A_1A_2A_3\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ sokszöget ($n \geq 2$), amelynek szemközti oldalai egy paralelogramma szemközti oldalai. (Az $A_{2n}A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ oldal szemközti oldala rendre az $A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_{n+2}, A_{n+}$ oldal.) Mutassuk meg, hogy van olyan affin szabályos $2n$-szög, amelynek adott az A_1 és A_2 csúcsa! Szerkesszük meg!

Feladat 87. Mutassuk meg, hogy az affin szabályos $2n$-szög szemközti csúcsait összekötő átlói egy pontban metszik egymást!

Feladat 88. Mutassuk meg, hogy $n \in \mathbf{H}$ egész, $P \neq Q$ pontok esetén

$$\overrightarrow{PX} = \xi \cdot \overrightarrow{PQ} \Longrightarrow P, Q, X \text{ kollineáris,}$$

ahol
(a) **H** a pozitív egész számok halmaza,
(b) **H** az egész számok halmaza,
(c) **H** a racionális számok halmaza,
(d) **H** a valós számok halmaza.

Feladat 89. Igaz vagy hamis?
(a) Egy (P, Q) kötött vektor pontosan egy szabad vektort reprezentál.
(b) Különböző szabad vektoroknak lehet ugyanaz a reprezentánsuk.
(c) Két különböző kötött vektor mindig két különböző szabad vektort reprezentál.
(d) Két különböző kötött vektorhoz található olyan szabad vektor, amelynek ők a reprezentánsai.

Feladat 90. Mutassuk meg, hogy bármely **a** szababdvektornak van P kezdőpontú reprezentánsa!

Feladat 91. Igaz vagy hamis? Bármely **g** szabad vektornak van legalább egy V vlgpontú reprezentánsa.

Feladat 92. Igaz vagy hamis?

(1) Bármely két kötött vektort össze tudunk adni.
(2) Bármely két szabad vektort össze tudunk adni.
(3) Ha két szabad vektor mint halmaz metszete nem üres,
  (a) akkor a szabad vektorokat össze tudjuk adni.
  (b) akkor a szabad vektorokat nem tudjuk összeadni.
  (c) akkor minden reprezentánsuk megegyezik.

Feladat 93. Mutassuk meg, hogy az **f** és **g** szabad vektorok $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ összege független attól, hogy az összeadás definíciójában az **f** és **g** melyik reprezentánsát használjuk?

Feladat 94. Hány inverz eleme van az **f** vektornak a szabadvektorok $\mathcal{F}$ halmazában?

Feladat 95. Mutassuk meg a szabad vektorok $\mathcal{F}$ halmazában az inverz vektor és a zérus vektor egyértelműségét!

Feladat 96. Igazoljuk a szabad vektorok valós számmal szorzásának azonosságait! (TK. 25. o.)

Feladat 97. Mit értünk az **f** és **g** szabad vektorok $\mathbf{f}-\mathbf{g}$ különbségén?

Feladat 98. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, akkor an $n \cdot \mathbf{f}$ szabad vektor P kezdőpontú $(P, X_P(n, Q))$ reprezentánsainak $Q_i = X_P(i, Q)$ végpontjai a PQ egyenesen vannak!

Feladat 99. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{X_P(k,Q)X_P(k+1,Q)} = \overrightarrow{PQ}$, ahol $P \neq Q$.

Feladat 100. Fejtsük ki, mi a különbség a *kötött vektor*, *szabad vektor* és *helyvektor* között!

Definíció 2.1. Két nem $\mathbf{0}$ szabad vektort párhuzamosnak nevezünk, ha reprezentánsaik egyenesei párhuzamosak. A zérus szabad vektort minden szabad vektorral párhuzamosnak tekintjük.

Feladat 101. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szabad vektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha közülük valamelyik a másiknak valós számszorosa.

Feladat 102. Mutassuk meg, hogy $q, r, \in \mathbf{Q}$ esetén $X_P(q, X_P(r, Q)) = X_P(q \cdot r, Q)$ (TK. 32. o.)!

Feladat 103. Hogyan teremthetünk kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot az egyenesek pontjainak halamza és a valós számok halmaza között?

Feladat 104. Mutassuk meg, hogy a $P \neq Q$ pontok esetén a

$$PQ \to \mathbf{R}; \quad R \mapsto (PQR)$$

egy bijektív leképezés, melynek értelmezési tartománya $PQ \setminus \{Q\}$, értékkészlete $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Feladat 105. Legyen $P \neq Q$ pontok esetén $l = QP$, és tekintsük az l egyenesnek azt a rendezését, amelyben $P \prec Q$. Határozzuk meg a (PQR) osztóviszony előjelét,
(a) ha R az l_Q^+ félegyenesen van;
(b) ha R az l_P^- félegyenesen van;
(c) ha $R = P$;
(d) ha R a PQ nyílt szakaszon van.

Feladat 106. Mutassuk meg, hogy ha az l egyenesen a $P \neq Q$ pontok esetén $P \prec Q$, akkor az $R \mapsto (PQR)$ függvény szakaszonként szigorúan monoton növekvő!

Feladat 107. Adott az affin síkon az egymással nem párhuzamos $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor. Mutassuk meg, hogy bármely $\mathbf{v}$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ számpár van, melyre $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$.

Feladat 108. Adott az affin térben az egymással nem párhuzamos $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor. Mutassuk meg, hogy bármely $\mathbf{v}$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ számhármas van, melyre $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + +\lambda_3 \mathbf{e}_3$.

Feladat 109. Milyen kapcsolatban áll a párhuzamos szelők tétele az osztóviszonnyal? Mutassuk meg, hogy ha O, P és Q nem kollineáris, akkor

$$(OPP') = (OQQ') \iff PQ \parallel P'Q'!$$

Feladat 110. Adott az egymással nem párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor.
(a) Szerkesszük meg a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektort!
(b) Szerkesszük meg adott $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén az $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ vektort!

Feladat 111. Legyen $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel a következő vektorokat:
(a) $2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$,
(b) $-3\mathbf{m} - \frac{1}{3}\mathbf{n}$,
(c) $4\mathbf{m} - \frac{1}{5}\mathbf{n}$.

Feladat 112. Legyen $\mathbf{m} = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Fejezzük ki a következő vektorokat az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ vektorokkal:
(a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$,
(b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$,
(c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$.

Feladat 113. Legyen O, A, B három nem kollináris pont, és tekintsük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorokat. Mutassuk meg, hogy az $\overrightarrow{OX} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ vektor esetén az X pont akkor és csak akkor van rajta az AB egyenesen, ha $\alpha + \beta = 1$.

Feladat 114. Tekintsük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ vektorokat, melyekre $\overrightarrow{OC} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Mi a kapcsolat α, β és az (ABC) közönséges osztóviszony között?

Feladat 115. Legyen O, A, B, C négy nem komplanáris pont, és tekintsük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ vektorokat. Mutassuk meg, hogy az $\overrightarrow{OX} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ vektor esetén az X pont akkor és csak akkor van rajta az A, B és C pontok által meghatározott síkon, ha $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Feladat 116. Mutassuk meg, hogy három független vektor közös kezdőpontú reprezentánsai által meghatározott parallelepedon testátlói egy közös pontban metszik egymást!

Feladat 117. Egy parallelepipedon OO' testátlóján vegyük azt a P pontot, amelyre az $(OO'P)$ (affin) osztóviszony értéke $\frac{1}{2}$. Mutassuk meg, hogy ez a pont rajta van a parallelepipedon O-ból induló három élének (másik) végpontjai által meghatározott síkon!

3. Blokk

Feladat 118. Mit értünk azon, hogy a két vektortér izmorf?

Feladat 119. Igaz vagy hamis?
(a) Ha két vektortér izomorf, akkor pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik.
(b) Ha két vektortér izomorf, akkor rájuk pontosan ugyanazok az állítások igazak.
(c) Ha két vektortér izomorf, akkor a vektortér struktúrája szempontjából elegendő az egyiket tanulmányozni.

(d) Bármely két vektortér izomorf, mert műveleteik ugyanazok.

Feladat 120. Adjunk példát izmorf és nem izomorf vektorterekre!

Feladat 121. Lehetnek-e izomorfak a $\mathbf{R}^2$ és az $\mathbf{R}^3$ koordinátaterek?

Feladat 122. Miért izomorf a szabad vektorok tere és az O kezdőpontú helyvektorok tere?

Feladat 123. Mutassuk meg, hogy a koordinátasík (koordinátatér) vektortér a rajta értelmezett összeadás, és valós számokkal való szorzás művelettel! (TK. 38. o.)

Feladat 124. Mit értünk azon, hogy a szabad vektorok tere és az O kezdőpontú helyvektorok tere kanonikusan izomorf?

Feladat 125. Kanonikusan izomorf-e az O kezdőpontú helyvektorok tere és a koorinátasík?

Feladat 126. Mit jelent az, hogy a sík helyektorainak tere és a koordinátasík mint vektortér nem kanonikusan izomorfak?

Feladat 127. Igaz-e, hogy bármely két koordinátasík mint vektortér izomorf?

Feladat 128. Izomorf-e az O kezdőpontú helyvektorok tere és az O' kezdőpontú helyvektorok tere?

Feladat 129. Írjuk fel annak a koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a koordiátasík (x_1, x_2) és (y_1, y_2) pontjain.

Feladat 130. Írjuk fel annak a koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a koordiátasík $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontjain!

Feladat 131. Írjuk fel annak a koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a koordiátasík $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontjain!

Feladat 132. Írjuk fel annak a koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a koordiátasík $(1, 1)$ és $(2, 2)$ pontjain!

Feladat 133. Rajta van-e a $(4, 2)$ pont az $x + 3y = -2$ koordinátegyenesen?

Feladat 134. Írjuk fel annak a koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $4x - 3y = 5$ koordinátaegyenessel, és átmegy a $(3, 2)$ ponton!

Feladat 135. Határozzuk meg a $4x - y = 2$ és $-4x + y = 3$ koordinátaegyenesek metszéspontját!

Feladat 136. Adjunk feltételt arra, hogy a koordinátasík három pontja kollineáris legyen!

Feladat 137. Egy egyenesre illeszkedik-e az $(1, 1)$, $(2, 3)$ és $(0, 2)$ pont a koordinátasíkon?

Feladat 138. Adjunk feltételt arra, hogy a koordinátasík három koordinátaegyenese egy ponton menjen át!

Feladat 139. Van-e közös pontja a $x - y = 2$, $2x + 3y = 1$ és $x - 2y = 0$ koordinátaegyeneseknek?

Feladat 140. Igaz-e, hogy az affin sík $\phi\colon (x, y) \mapsto (x_0, y_0) + (x, y)M_\phi$ koordinátatranszformációja esetén (x_0, y_0) mindig az origó képe?

Feladat 141. Mutassuk meg, hogy az az affin sík $\phi\colon (x, y) \mapsto (x_0, y_0) + (x, y)M_\phi$ koordinátatranszformációja kölcsönösen egyértelmű!

József Kozma, Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi vértanúk tere 1, 6725 Szeged (Hungary); E–mail: kozma@math.u-szeged.hu .