Feladat. Tudjuk, hogy $x, y \in \mathbf{Q}$, továbbá $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$. Igazolandó, hogy $x^{1/3}$ maga is racionális.

Megoldás. Jelöljük $x^{1/3}$-t a-val. Ekkor

$$\begin{aligned} x + y &= \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)\left(\left(x^{1/3}\right)^2 - x^{1/3}y^{1/3} + \left(y^{1/3}\right)^2\right) \\ &= 1 \cdot (a^2 - a \cdot (1-a) + (1-a)^2) \\ &= 3a^2 - 3a + 1 = 3a(a-1) + 1. \end{aligned}$$

Világos, hogy ha x és y racionális, akkor $x+y$ is az, így $3a(a-1)+1$ is racionális, de akkor $3a(a-1)$ és $a(a-1)$ is az.

Azt fogjuk — általánosságban — megmutatni, hogy amennyiben $a(a-1)$ racionális, továbbá a^3 is, akkor az maga után vonja azt is, hogy a racionális.

Tegyük fel tehát, hogy $a(a-1)$ racionális. Ez azt jelenti, hogy valamely $(p;q) = 1$ egész számpárra $a(a-1) = p/q$. Ez ekvivalens a $qa^2 - qa - p = 0$ egyenlettel, melynek gyökei:

$$a_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4pq}}{2q}.$$

Mindez úgy is fogalmazható, hogy abból a tényből, hogy $a(a-1)$ racionális, következik, hogy a felírható

$$a = \frac{A + B\sqrt{C}}{D} \tag{1}$$

alakban, ahol A, B, C és D valamennyien egész számok (speciálisan $A = q$, $B = 1$, $C = q^2 + 4pq$ és $D = 2q$), sőt, feltehető, hogy C nem négyzetszám (ha a négyzetgyök alatt négyzetszám állna, akkor B-t 0-nak választjuk). Vizsgáljuk meg, milyen következményekkel jár, hogy egy ilyen formában felírható a szám köbe is racionális. Ekkor nyilván

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{A^3 + 3A^2B\sqrt{C} + 3AB^2C + B^3C\sqrt{C}}{D^3} \\ &= \frac{A^3 + 3AB^2C + B(3A^2 + B^2C)\sqrt{C}}{D^3}. \end{aligned}$$

Mivel a^3 racionális, ezért $\sqrt{C}$ szorzója nyilvánvalóan 0 kell, hogy legyen. Vagyis $B = 0$ vagy $3A^2 + B^2C = 0$ mindenképpen fennáll.

Ha $B = 0$, akkor (1) szerint a mindenképpen racionális. Tegyük fel most, hogy $3A^2 + B^2C = 0$. Beírva A, B és C helyére q-t, 1-et és $q^2 + 4pq$-t, a

$$3q^2 + q^2 + 4pq = 0$$

egyenlőséghez jutunk, amiből — mivel $q \neq 0$ — $p + q = 0$ adódik, ami csak úgy lehetséges, ha $p = 1$ és $q = -1$ vagy $p = -1$ és $q = 1$. De ekkor C-re negatív számot, -3-at fogunk kapni, ami arra utal, hogy ez az eset (mármint a $3A^2 + B^2C = 0$ egyenlőség) nem fordulhat elő.