A számfogalom alakulásának néhány lépése az ókortól a XX. század közepéig.

Dr. Klukovits Lajos
SZTE Bolyai Intézet

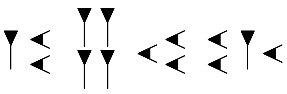
Bolyai Nyári Akadémia
Szováta
2006. július 16-22.

A LEGTÖBB TUDOMÁNYBAN
MINDEGYIK GENERÁCIÓ
LEROMBOLJA AZT,
AMIT ELŐDEI ÉPÍTETTEK.
A MATEMATIKA AZ EGYETLEN,
AMELYBEN MINDEN EGYES GENERÁCIÓ
ÚJ ÉRTELMET ILLESZT
A RÉGI STRUKTÚRÁHOZ.

(H. Hankel)

Mezopotámiai aritmetika az Óbabiloni Birodalom korában.

A Yale Egyetemen mezopotámiai gyűjteményének egyik agyagtábláján található a következő jelsorozat.



Ez ez egy hatvanas számrendszerben írt számot rejt:

$$1;24,51,10$$

ugyanis számírásukban az 𒁹 „ék” jelentése *egy*, a 𒌋 „sarokpánt” jelentése *tíz*, de nem volt jele a „hatvanados” vesszőnek, a számjegy hiányának.
Átírva 10-es számrendszerre a

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421\overline{296}$$

számot kapjuk, amely a $\sqrt{2}$-re emlékeztet. Valóban,
egy mai számítógép beépített kalkulátora a $\sqrt{2}$-re következő értéket adja:

$$1,4142135623730950488016887242097$$

míg egy 9 jeggyel dolgozó zsebkalkulátorral számolva a

$$1,4142135\text{-t}$$

kapunk. Az eltérés abszolút értéke mindkét esetben kisebb a $6 \cdot 10^{-7}$-nél, ami döbbenetes pontosság.
Hogyan számolták ki, mire használták?
1. Feladat. *Kivontam a négyzetet* [a négyzet oldalát] *a területéből és az* 14, 30.

Az agyagtáblán e feladat megoldása a következő.

> *Vedd az 1-et* [*az együtthatót*] *és osszad két részre. A* 0; 30-*at szorozd önmagával, az* 0; 15. *Ezt add hozzá a* 14, 30-*hoz. A* 14, 30; 15 [*négyzet*]*gyöke* 29; 30. *Ezt add hozzá a* 0; 30-*hoz, amit önmagával szoroztál. Ez* 30, *ami a négyzet* [*oldala*].

Elemzés. Az $x^2 - x = 14,30$ egyenletet, $x^2 - ax = b$ alakút, kell megoldani. A szöveg szerint az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították.

Oldjuk meg egyenletünket a tábla szövege szerint.

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 14,30 \\ x^2 - x + 0;15 &= 14,30 + 0;15 = 14,30;15 \\ (x-0;30)^2 &= 14,30;15 \\ x - 0;30 &= 29;30 \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Most végezzük el az előbbi számolást szimbólikusan is.

$$\begin{aligned} x^2 - ax &= b \\ x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 &= b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ x - \frac{a}{2} &= \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ x &= \frac{a}{2} + \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Látható, hogy a másodfokú egyenletek jól ismert gyökképletét kaptuk meg. Az eljárás is ugyanaz, ahogy ma azt levezetjük.
Mit kellet ehhez tudniuk?
1. Az $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ azonosságot.
2. Azt a módszert, amit mi „mérlegelvnek” nevezünk.

Az elsőn kevésbé csodálkozunk, igen gyakran alkalmazták, de a második??? Erről az 1930-as évekig úgy vélték, hogy először a Kr.u. VIII. században, mintegy 2500 évvel később élt al-Khwarizmi alkalmazta egyenletek megoldásában: ez a nevezetes *al-muqabla*, ami szerepel híres traktátusa címében is.

Ha a formulára nézünk: ismerték a másodfokú egyenlet gyökképletét erre a speciális esetre???

Természetesen általános képletként NEM, de úgy számoltak, mint mi ma.

A következő feladat teljesen megmutatja eljárásuk erejét.

2. Feladat. *A négyzet hétszereséhez hozzáadtam a terület tizenegyszeresét és ez* $6;15$.
Világos, hogy a

$$11x^2 + 7x = 6;15$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Ismét négyzetté alakították az egyenlet bal oldalát, de ehhez előbb 11-gyel megszorozták az egyenlet, azaz a

$$2,1x^2 + 1,17x = 1,8;45$$

egyenlettel dolgoztak.
Ha most ez utóbbi egyenletet

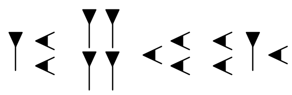
$$ax^2 + bx = c$$

alakban írjuk, akkor számolásuk az

$$x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right)$$

formulával írható le, azaz mindkét utóbbi megoldás azt tanúsítja, hogy tulajdonképpen ismerték azt a
gondolatmenetet, amellyel mi ma származtatjuk a másodfokú egyenlet gyökképletét.
HANGSÚLYOZNI kell a következőket:
1. Minden esetben konkrét problémákat oldottak meg, és a megoldásokat kizárólag szövegesen írták le.
2. Általánosítási törekvések, absztrakciók még nyomokban sem találhatók.
3. Csupán „recepteket" adtak konkrét példákkal arra, hogy bizonyos jellegű problémák hogyan kezelhetők.

Mindezt jól példázza azon — korábban már említett — eljárásuk is, amellyel számok, pontosabban pozitív racionális számok) négyzetgyökét határozták meg. Ez is egy Hammurapi uralkodása idején keletkezett agyagtáblán olvasható.
Tekintsük ismét a korábbi számot.



$$1; 24, 51, 10$$

Egy olyan számok kell keresnünk, amelyiket önmagával megszorozva 2-t kapunk. Az is világos, hogy a keresett szám nagyobb 1-nél, de kisebb 2-nél. Az agyagtábláról tudjuk, hogy lépésenként egymás után olyan számokat számoltak ki, amelyeket önmagukkal szorozva a 2-höz egyre közelebb kerültek.

1. lépés: Legyen az első közelítés $1; 30$ és osszuk el ezzel a 2-t, $1; 20$-at kapunk.

2. lépés: Vegyük e két szám összegének felét (számtani közepüket), ami az előbbi kettő között van. Ez

$$0; 30(1; 30 + 1; 20) = 0; 30 \cdot 2; 50 = 1; 25.$$

Ha ezzel elosztjuk a 2-t, akkor $1; 24, 42, 21$-et kapunk.

3. lépés: Vegyük e két utóbbi szám számtani közepét:

$$\begin{aligned} 0;30(1;25+1;24,42,21) &= 0;30\cdot 2;49,42,21 \\ &= 1;24,51,10,30. \end{aligned}$$

Ha elhagyjuk az utolsó 60-ados jegyet, vagy a 21 felét egyszerűen 10-nek vesszük, megkapjuk a tábla értékét.

Fogalmazzuk meg az eljárást általánosan is. A feladat a $\sqrt{a}$ kiszámítása valamely $a \in \mathbb{Q}^+$-ra, azaz pozitív racionális számra.
1. lépés: Legyen a_1 egy tetszőleges közelítő érték, és $b_1 = \frac{a}{a_1}$. Világos, hogy $\sqrt{a}$ e két érték között van.
2. lépés: Legyen $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ és $b_2 = \frac{a}{a_2}$. E két szám is közrefogja $\sqrt{a}$-t, és a_2, b_2 az a_1 és a b_1 közé esik.

Az eljárást folytatva olyan

$$a_1, a_2, \ldots \qquad b_1, b_2, \ldots$$

sorozatokat kapunk, amelyre egyrészt a_i és b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ közrefogja $\sqrt{a}$-t, másrészt

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2| > \ldots$$

Ez azt jelenti, hogy mindkét sorozat egyre jobban megközelíti a keresett értéket, ami e két sorozat közös határértéke (mai terminológiával),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a}.$$

Az ókori Kína aritmetikája.

A LEGFŐBB FORRÁS:

> **Az aritmetika művészete kilenc könyvben**, a Kr.e. I. évezred kínai matematikája nagy részének összefoglalása.

Két kérdést tekintünk mindössze.

1. Számírás, számolótáblák.
2. Mire tudták használni aritmetikai tudásukat?

1. A kínai számrendszer és számírás.

Tizes alapú és bizonyos helyiérték-szerű jegyeket hordoz. A számjegyeket pálcikákból (számolópálcák) rakták függőlegesen vonalazott táblára. Föntről lefelé írtak.

𝍠	*egy, száz,* $\ldots, 10^{2k}$,
𝍡	*kettő, kétszáz,* $\ldots, 2 \cdot 10^{2k}$,
𝍢	*három,* $\ldots, 3 \cdot 10^{2k}$,
𝍣	*négy,* $\ldots, 4 \cdot 10^{2k}$,
𝍤	*öt,* $\ldots, 5 \cdot 10^{2k}$,
𝍥	*hat,* $\ldots, 6 \cdot 10^{2k}$,
𝍦	*hét,* $\ldots, 7 \cdot 10^{2k}$,
𝍧	*nyolc,* $\ldots, 8 \cdot 10^{2k}$,
𝍨	*kilenc,* $\ldots, 9 \cdot 10^{2k}$,
𝍩	*tíz, ezer,* $\ldots, 10^{2k+1}$,
𝍪	*húsz, kétezer,* $\ldots, 2 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍫	*harminc,* $\ldots, 3 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍬	*negyven,* $\ldots, 4 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍭	*ötven,* $\ldots, 5 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍮	*hatvan,* $\ldots, 6 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍯	*hetven,* $\ldots, 7 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍰	*nyolcvan,* $\ldots, 8 \cdot 10^{2k+1}$,
𝍱	*kilencven,* $\ldots, 9 \cdot 10^{2k+1}$,

„Az egyesek állnak, a tizesek fekszenek, a százasok állnak és az ezresek ismét fekszenek..."

A

𝍮𝍦𝍪𝍧

jelsorozat a **6728** számot reprezentálja.

2. Egy érdekes számolás.

A VIII. könyv a következő problémával kezdődik.

> *3 jó kévéből, 2 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 39 tau gabonát kapunk. 2 jó kévéből, 3 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 34 tau gabonát kapunk. 1 jó, 2 közepes és 3 rossz kévéből pedig 26 tau gabonát. Mennyi gabonát kapunk 1 -1 jó, közepes és rossz kévéből?*

A válasz: 1 jó kéve $9\frac{1}{4}$ tau, 1 közepes kéve $4\frac{1}{4}$, 1 rossz kéve $2\frac{3}{4}$ tau gabonát ad.
A tömör választ a némileg részletezett megoldás követte, a megfelelően kirakott számolótábla-képeket közölték kommentár nélkül:

1. Táblakép.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

2. Táblakép.

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

3. Táblakép.

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

4. Táblakép.

$$\frac{99}{36} = \mathbf{2\frac{3}{4}},$$
$$(24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 = \mathbf{4\frac{1}{4}},$$
$$(39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 = \mathbf{9\frac{1}{4}}.$$

Világos, hogy az utolsó táblán a végeredmény van, de kérdés, HOGYAN SZÁMOLTAK?
Ha x, y, z jelöli a jó, a közepes és a rossz kévék adta gabonát, akkor az

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ez megfelel az 1. Táblaképnek, hiszen

1	2	3	
2	3	2	
3	1	1	
26	34	39	

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

A további táblaképek:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 4y + 8z &= 39 \end{aligned}$$

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer már könnyen megoldható:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} \frac{99}{36} &= \mathbf{2\frac{3}{4}} \\ (24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 &= \mathbf{4\frac{1}{4}} \\ (39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 &= \mathbf{9\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Nem nehéz észrevenni, hogyan is számoltak. A közel kétezer évvel később Gauss által fölfedezett módszerrel, csak láthatóan el akarták kerülni a törteket mindaddig, amíg az lehetséges. Eljárásukat ők **Feng cheng** módszernek nevezték.

A gyökmennyiségek kezelése, a negatív számok problémája.

Mezopotámia.

- A négyzetgyökvonás aktuális eredményét nem tekintették minden esetben pontosnak, DE úgy vélhették, hogy eljárásukat elég sokáig folytatva a pontos értékhez érnek.
- Ismerték a „hiány” fogalmát, tudtak is vele számolni annak ellenére, hogy nem számnak tekintették.

Görögök.

- A klasszikus korban nem számoltak, de tőlük ered az „összemérhetetlenség” fogalma, ami az irracionálisnak felel meg.
- Euklidész az Elemek X. könyvében részletesen tárgyal bizonyos nem összemérhető mennyiségeket és ezek arányát: az irracionálisok ókori elmélete.
- A hellén korban ugyan végeztek közelítő számításokat (pl. Archimédész), de gyökmennyiségekkel nem foglalkoztak.

A kora középkori India.

- Tőlük ered a 10-es alapú helyiértékes számírás.
- A hiány olykor szám is, a VI. században Aryabhata néhány szabályt adott kezelésükre.
- Ugyanebben a században alkalmaznak először jelet a számjegy hiányára: „*hiányzó számjegy helyébe írj köröcskét.*”
- A VII. század elején tekintik először számnak a „számjegy hiányát”, azaz megjelenik a **nulla**, mint szám, DE erős korlátokkal.
- A IX. században Mahavira írta:

egy számot 0-val szorozva 0-t kapunk,
s ha egy számból 0-t vonunk ki,
akkor a szám nem változik.
ha egy számot 0-val osztunk,
akkor a szám változatlan marad.

Megjegyzés. Ha valamit „sehány” részre osztunk,... A „semmi” a 0 szinonímája. Sok probléma forrása: mi az, ami „kisebb/kevesebb a semminél”?

- Semmit nem bizonyítottak, csak szabályokat fogalmaztak meg verbálisan, gyakran verses formában. A szabályt példával illusztrálták. Például a törttel való szorzás szabálya:

Fordítsd meg és szorozz vele.

- Bhaskara szabálya a gyökmennyiségek összeadására:

A nagyobbik és a kisebbik hányadosának
négyzetgyökét növeld eggyel,
vedd ezen összeg négyzetét,
majd szorozd meg a kisebbel,
és ennek négyzetgyöke a két négyzetgyök összege.

- Az illusztráló példa:

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{3}}+1\right)^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$$

- Ugyancsak verbálisan fogalmazták meg a

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} \qquad (a,b>0)$$

  műveleti szabályt, illusztráló példája az előbbi

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

- Láthatóan a gyökmennyiségekkel úgy bántak, mint az egészekkel, hiszen a második szabály a

$$c+d=\sqrt{(c+d)^2}=\sqrt{c^2+d^2+2cd}$$

  azonosság $c=\sqrt{a}$ és $d=\sqrt{b}$ helyettesítéssel.

Negatív számok.

- Egyre kiterjedtebben számoltak „hiányokkal”,szinte számnak tekinteték már. Brahmagupta 628-ban megfogalmazta a négy alapművelet szabályát negatív számokra.
- Bhaskara (XII. sz.): egy pozitív számnak két négyzetgyöke van, az egyik pozitív, míg a másik negatív.
- Bhaskara: Van-e négyzetgyöke a negatív számoknak? NINCS, mert bármely szám négyzete pozitív.
- Mindezt indoklások, pontos definíciók és tételek megfogalmazása nélkül tették, általában verses formában.
- MINDEZEK ELLENÉRE a negatív számok használata meglehetősen korlátozott, jobbára csak a hiány jelölésére használták.
- Konkrétan, ha az egyenlet valamely gyöke (a számolás végeredménye) negatív számnak adódott, akkor azt, mint lehetetlen megoldást, elvetették. Például még Bhaskara is ezt írta, ha egy probléma (pl. egyenlet) megoldásaként 50-et és −5-öt kapott:

  Ez esetben a második értéket nem lehet figyelembe venni, mert az nem lehet megoldása a problémának, hiszen az emberek nem fogadják el a negatív megoldásokat.
- Fölismerték, hogy egy másodfokú egyenletnek két gyöke van, ami negatív, vagy gyökmenyiség (irracionális) is lehet.
- Míg korábban — például Diophantosz — a másodfokú egyenletek három típusát:

$$ax^2+bx=c$$
$$ax^2=bx+c$$
$$ax^2+c=b$$

ahol $a, b, c > 0$ vizsgálták, nekik, mivel negatív együtthatókat is megengedtek, elegendő volt egyetlen típus, az

$$px^2 + qx + r = 0$$

vizsgálata. A ma is alkalmazott eljárás szerint a bal oldalt teljes négyzetté alakítása révén oldották meg ezen egyenleteket.

- Mahavira e módszerrel még az

$$\frac{x}{4} + 2\sqrt{x} + 15 = x$$

egyenletet is megoldotta, amely egy szöveges feladatból származott.

Lánctörtek.

- A határozatlan egyenletek elméletében a hinduk jóval meghaladták Diophantoszt. Ők az **összes egész megoldást** keresték, míg a **görög** megelégedett **egyetlen racionálissal**.
- Az

$$ax \pm by = c$$

alakú egyenletek, ahol $a, b, c > 0$ egészek, egész megoldásai megadásával először Aryabhata foglalkozott. Módszerét utódai jelentősen továbbfejlesztették. Végül egy olyan eljárást dolgoztak ki, amelyet ma is használunk.
- Nyilván elegendő azzal az esettel foglalkozni, amikor $\mathrm{ln.\,k.\,o.}(a, b) = 1$.
- Kövessük most Euklidész algoritmusát, amellyel a legnagyobb közös osztót határozza meg, s tegyük föl, hogy $a > b$.

$$\begin{aligned} a &= a_1 b + r_1 \\ b &= a_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

- Az első egyenlőségből

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}, \tag{2}$$

a másodikból

$$\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

amit (2)-be helyettesítve

$$\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Az eljárást folytatva kapjuk, hogy

(3) $$\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

amit abban az időben leginkább az

(4) $$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+} \cdots$$

alakban írtak.

- Világos hogy a (3), ill. (4) jobb oldalán álló végtelen összeg konvergencia-problémákat vet föl, de azok abban az időben föl sem merültek.
- Legyen a (3), ill. (4) lánctört k-adik kezdő szelete

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}} = \frac{p_k}{q_k}.$$

Igazolható, hogy

$$\frac{a}{b} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k}.$$

- Ha képezzük az $\frac{a}{b}$ lánctört alakját, s annak $\frac{p}{q}$ egy kezdő szelete, akkor

$$aq - bp = \pm 1,$$

ami könnyen vezet az $ax + by = c$ alakú egyenletek megoldásához.

Európa a XI - XV. században.

- A XIII. század közepéig majd minden matematikus az iszlám iskolákban tanult.
- Fokozatosan tért nyer a 10-es alapú helyiértékes, hindu-arab eredetű számírás.
- A XIII. század elején még használják a mezopotámiai 60-as számrendszert is, főleg nagy számolásigényű feladatokban.
- Palermoi János egyik feladata a pisai Leonardo számára: *Megoldandó az*

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

- Leonardo közelítő megoldása

$$x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$$

$3 \cdot 10^{-11}$ pontosságú.

- Összefoglalók: Luca Pacioli: Summa ..., Tartaglia: General trattato de'numeri ...

XVI. század.

- Új technikák az irracionálisokkal való számolásokra, pl. M. Stiefel kalkulusa az

$$\sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b}}$$

alakú kifejezésekre.

- S. Stevin javaslata a tizedestörtek írására:

$$5,912 \text{ írása } 5 \;⓪ 9 \;① 1 \;② 2 \;③ \text{ vagy } 5,9'1''2'''$$

- G. Cardano: köbgyököt tartalmazó nevező gyöktelenítése.
- Nincs előrelépés a negatívok és az irracionálisok megítélésében. Pozitívum: a 0 ugyan már többnyire számnak tekintetik, bár általában még „semminek” nevezik.

Vita az irracionálisokról.

- Stiefel: Arithmetica Integra (1544):

  Mivel az olyan geometriai bizonyításokban, ahol a racionális számok nem megfelelőek alkalmazhatók az irracionális számok, és velül elvégezhetjük a bizonyításokat; az irányba kényszerülünk haladni, hogy kijelentsük: az irracionálisok igenis számok, mivel a velük kapott eredmények reálisok (valóságosak). Másrészt azonban más meggondolások arra késztetnek bennünket, hogy tagadjuk azt, hogy az irracionálisok egyáltalán számok. Ugyanis, amikor számolunk velük (tizedestört alakban) azt tapasztaljuk, hogy nem lehet őket pontosan meghatározni. Így nem nevezhetjük őket igazi számoknak, mivel természetüknél fogva hiányzik belőlük a precizitás. Ezért, ugyanúgy mint ahogy a végtelen nem szám, egy irracionális szám sem igazi szám, hanem éppúgy valami ködös végtelen.

Azaz *a valós számok egészek vagy törtek, így az irracionálisok nyilván nem számok.*

- B. Pascal (XVII. sz.) szerint

  ... az olyan mennyiségek, mint pl. a $\sqrt{3}$ csak geometriai mennyiségként foghatók fel. Az irracionálisok pusztán szimbólumok, amelyek nem léteznek az általuk reprezetált folytonos geometriai mennyiség nélkül. A velük való számolásokra tehát nem aritmetikai szabályok vonatkoznak, hanem az Eudoxos-féle arányelméletet (Euklidesz V. könyve) kell alkalmazni.

- Lényegében ugyanezen véleményt olvashatjuk I. Newton *Arithmetica Universalis* c. könyvében, amely 1707-ben jelent meg, de kb. 30 évvel korábbi eredményeinek összefoglalása.
- **S. Stevin: az irracionálisok olyan számok, amelyek tetszőleges pontossággal közelíthetők racionális számokkal.**
- R. Descartes, *A gondolkodás szabályai* (1628): az irracionálisok olyan absztrakt számok, amelyek folytonos mennyiségeket reprezentálnak.
- J. Wallis, *Algebra* (1685): az irracionálisok teljes jogú számok, és hangoztata, hogy az Elemek V. könyve lényegében aritmetika.

A negatív számok státusza.

- Iszlám tradíciók alapján számoltak ugyan velük (adósság, hiány), de a legtöbb matematikus nem tekintette azokat valós (azaz „igazi”) számoknak.

= Egyenletek megoldásaként egyáltalán nem jöhettek szóba.

- Stiefel: abszurd számok,
- Cardano az egyenletek negatív gyökeiről: fiktív megoldások, puszta szimbólumok, mert a „semminél kisebb mennyiséget jelölnek”, de az egyenletek transzformálásával, a probléma helyes megfogalmazásával „valóssá”, azaz pozitívvá tehetők, mint a következő feladatnál.

  Az apa 56, a fia 29 éves. Hány év múlva lesz az apa kétszer olyan idős, mint a fia?
- A feladat az $56 + x = 2(29 + x)$ egyenletre vezet, amelyből $x = -2$. Ez „lehetetlen megoldás”, abból adódott, hogy rosszul tűztük ki a feladatot. A helyes kérdés:

  Hány évvel korábban volt az apa kétszer annyi idős, mint a fia?
- B. Pascal: a $0 - 4$ kivonás valami teljesen abszurd dolog.
- A. Arnould (teológus és matematikus, Pascal barátja): megkérdőjelezte, hogy az

  $$(-1) : 1 = 1 : (-1)$$

  arány korrekt. Ugyanis, ha $-1 < 1$, akkor a bal oldalon kisebb szám aránylik nagyobbhoz, míg a jobb oldalon fordítva, nagyobb aránylik a kisebbhez. Ezen arányok semmiképp sem lehetnek egyenlők.
- Ugyanerről 1712-ben G. W. Leibniz:

  ... az ellenkezés jogos, de azért lehet ilyen arányokkal dolgozni, mert korrekt formájúak. Így velük ugyanaz a helyzet, mint a képzetes számokkal.
- A XVI. sz. végén T. Harriot angol algebrista: elfogadta a negatív számokat, de az egyenletek negatív gyökeit ő is elvetette. Ő használta először kettős értelemben a mínusz jelet.
- R. Bombelli (a „casus irreducibilis” első megoldója) korrekt definíciót adott a negatív számokra.
- S. Stevin: egyenletekben lehetnek negatív együtthatók, a „valós” gyök nem lehet negatív.
- J. Wallis eredeti elképzelése. Úgy vélte, a negatív számok nem kisebbek a 0-nál, hanem nagyobbak a végtelennél. *Arithmetica Infinitorum* (1685):

  az $a/0$ hányados pozitív a-ra végtelen lévén, amennyiben a nevezőt egy negatív b számra cseréljük, akkor az a/b hányadosnak nagyobbnak kell lennie a végtelennél.
- 1831-ben A. de Morgan (a University College of London professzora):

  A $\sqrt{-1}$ képzetes és a $-b$ negatív mennyiség abban hasonlít egymásra, hogy amennyiben bármelyikük is előkerül egy probléma megoldásaként, mindkető inkonzisztenciát vagy abszurditást jelez. (On the Studies of Dificulties in Mathematics)

  Illusztrációként megemlíti Cardano korábbi problémáját az apa és a fia életkoráról, de csak addig jut, hogy a kapott $x = -2$ megoldás abszurd.

Az irracionálisok problémája.

- Új megközelítés: 1572-ben Bombelli lánctörteket alkalmaz a $\sqrt{2}$ meghatározására (?közelítésére?).

  (1) $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y},$$

egyenletből

$$y = 1 + \sqrt{2}. \tag{2}$$

Az (1) mindkét oldalához 1-et adva, (2)-szerint

$$y = 2 + \frac{1}{y}. \tag{3}$$

Ismét a (2)-t, majd az (1)-et alkalmazva

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}.$$

Ebbe a (3)-at helyettesítve

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}}.$$

Az eljárást folytatva azt kapta, hogy

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}},$$

Bombelli jelölése:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \dots$$

Megjegyzés. E korban a konvergencia fogalma föl sem merült, így őt sem érdekelte, hogy a végtelen lánctört konvergál-e valamilyen értelemben, és ha igen akkor a $\sqrt{2}$-höz. Nemcsak lánctörteket alkalmaztak, hanem végtelen szorzatokat is bevezettek. Itt sem merültek föl konvergencia-kérdések e korban.

- Wallis 1685:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}.$$

Nem korrekt úton kapta a jó eredményt. Mai eszközökkel például a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx} = 1$$

tételből az

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad m \text{ páratlan}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2} \quad m \text{ páros}$$

egyenlőségekkel kapható, ahol

$$m!! = \begin{cases} m(m-2)(m-4)\ldots 1 & \text{ha } m \text{ páratlan,} \\ m(m-2)(m-4)\ldots 2 & \text{ha } m \text{ páros.} \end{cases}$$

- Lord William Brouncker (a RS tagja):

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\cdots$$

Wallis eredményének előzménye: Francois Viéte (francia udvari matematikus és csillagász) formulája π-re, amelyet körbe írt $4, 8, 16, \ldots$ oldalú sokszögek segítségével nyert:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \end{aligned}$$

A lánctörtek konvergenciaproblémájával is Wallis foglalkozott először az 1695-ös *Opera Mathematica* c. könyvében, de csak formális számolásokat végzett, megadta a lánctört véges kezdő szeletei (néhol konvergenseknek nevezik) sorozatát.

L. Euler és tanítványai, Lagrange.

- A racionális számok lánctört alakja véges, minden véges lánctört értéke racionális szám, következésképp a végtelen (egyszerű) lánctörtek irracionális számoknak felelnek meg.
- Mivel

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots,$$

  az e irracionális szám (Vollständige Einleitung ...)
- J. H. Lambert (1761): Ha $x \in \mathbb{Q}$ és $x \neq 0$, akkor e^x, $\tan x$ nem lehet racionális. Ez maga után vonja, hogy π irracionális, hiszen $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

- J. L. Lagrange (1765): Bármely valós(?) együtthatós másodfokú egyenlet gyökei véges, vagy periódikus végtelen lánctörtként állíthatók elő. Minden végtelen periódikus lánctört értéke kvadratikus irracionális.
- Lagrange eredményéből következik, hogy e nem lehet kvadratikus irracionális.
- Lagrange sejtése: a π nem lehet egyetlen racionális együtthatós nemzéró polinomnak sem gyöke. Megjelent az

  algebrai szám

  fogalma.
- Euler: „*Bizonyos számok meghaladják az algebrai módszerek erejét,*” azaz

  transzcendens számok.
- 1750 körül (Euler, Lambert, Lagrange) azt sejtették, hogy e, π, továbbá $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b > 1$ esetén $\log_a b$, és hasonlóan, ha $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, akkor e^x, $\tan x$ mind transzcendens szám.

MIK IS VALÓJÁBAN A VALÓS SZÁMOK.

- Euler, Lambert, Lagrange sejtése: Az e, π, továbbá $a, b \in \mathbb{Q},\ a, b > 1$ esetén $\log_a b$, és hasonlóan, ha $x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0$, akkor $e^x,\ \tan x$ mind transzcendens szám.

Létezik egyáltalán transzcendens szám?

Alapvető definíciók.
1. $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *n-edfokú algebrai szám,* ha van olyan n-edfokú irreducibilis $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, hogy $f(\alpha) = 0$.
2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám *n-edrendben approximálható racionális számokkal*, ha végtelen sok olyan $\frac{a}{b},\ b \geq 1$ racionális szám létezik, hogy

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c(\alpha)}{b^n},$$

ahol $c(\alpha)$ csak α-tól függő konstans.

Liouville tétele (1844). Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ n-edfokú algebrai szám, akkor α legföljebb n-edrendben approximálható racionális számokkal.

Következmény. Létezik transzcendens szám, ha létezik olyan valós szám, amely tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal.

Liouville (1844): A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000000000000000001\ldots$$

sor konvergens, és összege tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal, így transzcendens.

Megjegyzés. Látható, a tételbeli szám n-edik jegye 1-es, ha $n = m!$ valamely $m \in \mathbb{N}$-re, különben zéró. Ebből az is világos, hogy α irracionális.

Thue tétele. Ha α n-edfokú ($n \geq 3$) valós algebrai szám, akkor bámely $c > 0$ konstans esetén az

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{c}{c^n}$$

egyenlőtlenség csak véges sok $r/s \in \mathbb{Q}$-ra teljesül.

Roth tétele. Ha α valós algebrai szám és $\kappa > 0$ tetszőleges valós szám, akkor az

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^{2+\kappa}}$$

egyenlőtlenséget csak véges sok r/s racionális szám elégíti ki.

Megjegyzések.
(1) Roth tétele az erősebb.

(2) Téves az a hiedelem, hogy a transzcendens számok megegyeznek a „jól approximálhatókkal”. Csak az igaz, hogy minden jól approximálható szám transzcendens.
Tétel. Legyen $\kappa > 0$ valós szám, és H azon α valós számok halmaza, amelyekhez végtelen sok olyan r/s racionális szám van, melyekre

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^{2+\kappa}}$$

teljesül. Ekkor H nullamértékű halmaz.

Következmények.
(1) Az előbbi H halmaz minden eleme transzcendens.
(2) Csak megszámlálható sok tetszőleges rendben approximálható transzcendens szám létezik, így majdnem minden transzcendens szám „rosszul” approximálható.

G. Cantor két halmazelméleti eredménye.
(1) Az algebrai számok halmaza megszámlálható.
(2) Kontinuum sok transzcendens szám létezik, sőt majdnem minden valós szám transzcendens.

Néhány fontos konstans transzcendens volta.
HERMITE tétele. (1873): Az e szám transzcendens.
Hermite úgy vélte, hogy bizonyítása egyedi, azaz módszere másra nem használható.

LINDEMANN tétele. (1882) (L-Weierstrass) Ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ különböző algebrai számok, akkor $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_k}$ lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

Következmények.
(1) Az $e^{i\pi} + 1 = 0$ egyenlőség alapján adódik a π transzcendens volta, de következik Hermite eredményét is: ha $n = 2$, $p_1 = 1$, $x_2 = 0$, akkor e^{x_1} nem algebrai, s így e sem lehet az.
(2) A körnégyszögesítés ókori problémája nem oldható meg.
(3) Ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, akkor e^{α}, továbbá, ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, akkor $\log \alpha$ transzcendens.
A **mai napig nyitott kérdés** az $e + \pi$ szám természete, míg $e + i\pi$ transzcendens volta trivialitás. (Azonnal adódik az algebra alaptételéből, és abból, hogy az algebrai számok testet alkotnak.)

Ugyancsak **a mai napig ismeretlen** az ún. Euler- konstans, a

$$c = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

szám, milyensége.

Egészen a **múlt század 30-as éveiig nem volt ismert** az α^{β} alakú számok természete, ha α algebrai, β pedig irracionális algebrai szám. Például, algebrai-e vagy transzcendens a $2^{\sqrt{2}}$ szám?

Mindezek után nem meglepő D. HILBERT 1900-as problémafölvetése.

Hilbert VII. problémája.

Hermite és Lindemann eredményeit — amelyek az exponenciális függvényekre vonatkoznak — minden matematikus nagyra értékeli. Ezen az úton tovább kell haladni, s az elkövetkező időben az alábbi problémát kellene megoldani. Bizonyos — az analízisben fontos — transzcendens függvények egyes algebrai szám helyeken algebrai szám értékeket vesznek föl. Úgy tűnik, hogy ezt érdemes alaposan megvizsgálni. Ugyanis általában azt képzeljük, hogy a transzcendens függvények mindenütt transzcendens értékeket vesznek föl. Tesszük ezt annak ellenére, hogy ismerünk olyan transzcendens függvényeket, amelyek algebrai számokhoz algebrai számot, sőt racionálisat rendelnek. Például az $e^{i\pi z}$ *exponenciális függvény értéke minden* $z \in \mathbb{Q}$*-ra algebrai, míg minden* $z \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$*-ra transzcendens. Ezen állítás geometriailag is megfogalmazható. Ha egy egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szög és a szárak által alkotott szög aránya transzcendens, akkor az alap és a szár aránya is transzcendens. Bár ez egy igen egyszerűen hangzó állítás, ekvivalens Hermite és Lindemann eredményével, s a bizonyítása is igen nehéz, sőt meglehetősen bonyolult.*
Hasonlóan nehéz lehet a bizonyítása a következő állításnak is.

Legyen $\alpha \in \mathbb{A}$ **és** $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$**, ekkor az** α^β **alakú számok, például** $\mathbf{2^{\sqrt{2}}}$, $\mathbf{e}^\pi = \mathbf{i}^{-\mathbf{2i}}$**, mindig transzcendens számok, vagy legalább irracionálisok.**

Biztos vagyok benne, hogy ezen, és a hasonló problémák megoldása egészen új módszereket igényel, s egy új szemléletet is ad. Új megvilágításba helyezi az irracionális és a transzcendens számokat.

Úton probléma megoldása felé.

Hilbert e problémáját annyira nehéznek tartotta, hogy egy 1919-es göttingeni előadásában a következő vélekedéseinek adott hangot:

(1) A Riemann-hipotézis bizonyítása irányába az utóbbi években komoly előrehaladás történt, így nagyon reméli, hogy még megéri a bizonyítását.

(2) Számos bíztató eredmény van a Fermat-sejtéssel kapcsolatban is, ezért talán a hallgatóság legfiatalabb tagjai megérik a sejtés bizonyítását.

(3) **Annak a bizonyítását azonban, hogy a** $\mathbf{2^{\sqrt{2}}}$ **transzcendens szám, a jelenlevők közül senki sem fogja látni.**

Ma már tudjuk, hogy Hilbert e három állítása közül legalább kettőben tévedett, talán csak a második jóslata teljesült.

A Megoldás.

1. 1929-ben Gelfond igazolta, hogy amennyiben β komplex kvadratikus irracionális szám, akkor α^β transzcendens. Ez tartalmazza az e^π esetet, mert e szám az i^{-2i}

(2) Egy évvel később — Gelfond módszerének újabb módosításával — Kuzmin és Siegel (egymástól függetlenül) megmutatták, α^β akkor is transzcendens, ha β valós kvadratikus irracionális szám. Ezzel, még bőven Hilbert életében, bebizonyították, hogy $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám.

(3) Végül 1934-ben — egymástól függetlenül, Siegel egy eredményének fölhasználásával — Gelfond és Schneider igazolták Hilbert sejtésének, a VII. problémának legerősebb változatát.

Gelfond - Schneider tétel. Ha α, β 0 és 1-től különböző algebrai számok, továbbá β irracionális, akkor α^β transzcendens szám.

Hilbert ezen eredmény megszületését megérte.