Aritmetikai kérdések.

A kései ókortól Eulerig.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2014. március 18.

A folyammenti kultúrák kora.

Mezopotámia.

- Számon — mai szóhasználattal — pozitív racionális számot értettek.
- Ha gazdasági számításnál „negatív szám" adódott, akkor azt nem tekintették rendes számnak, hanem az egyszerűen hiányt, adósságot jelölt.
- A gyökvonáskor mindig csak pár lépést tettek algoritmusukban, hitték, hogy az néhány lépés után véget ér.
- Következésképp, az irracionális fogalma föl sem merülhetett.

Egyiptom.

- A szám náluk is pozitív racionális volt, sőt
- a törtek kezelése is speciális, nehézkes volt.

A görögök.

A szám.

- Euklidesz definícója szerint: egységekből összetevődő sokaság, tehát 1-nél nagyobb egész szám.
- Definiálták és használták a számok arányát, ami a pozitív racionális számnak felelt meg.
- Az arányokkal való számolásról szól Euklidesz V. könyve, az Eudoxos által bevezetett mennyiség fogalmát használva.
- De itt csak ún. összemérhető mennyiségekkel foglalkoztak, bár ezt itt nem posztulálták.
- Azaz, a szám 1-től különböző pozitív racionális szám.

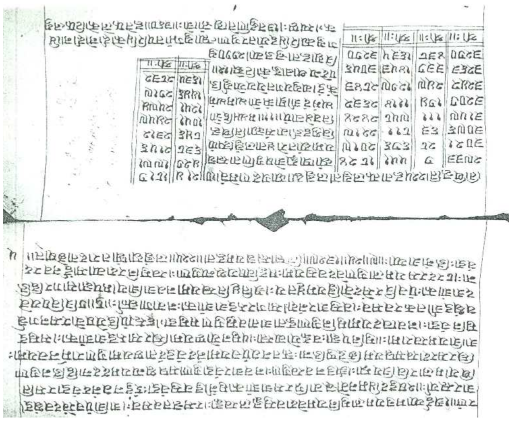
A X. könyv.

Ezen nagyrészt Eudoxostól és Theaitetosztól származó könyv bizonyos összemérhetetlen mennyiségekkel és azok arányával foglalkozik, azaz speciális, pozitív irracionálisokkal.

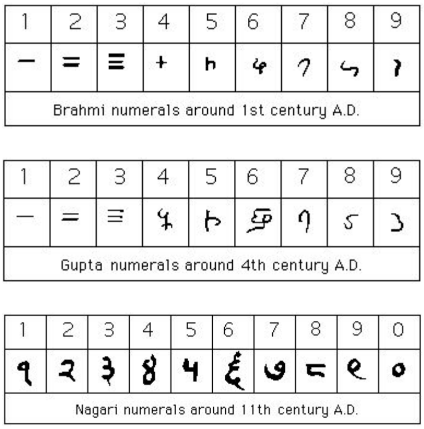
1. Hindu aritmetika (200-1200)

- Geometriájuk a görög tradíciók folytatása, de aritmetikájuk új utakon jár.
- Az V. század végétől a hindu matematikusok munkáját elsősorban asztronómiai és asztrológiai problémák motiválták. Szinte az összes matematikai mű csillagászati könyvek részeként jelent meg.
- E korból már több matematikus (csillagász/csillagjós) nevét is ismerjük:
  - **ARYABHATA** (476–550(?)),
  - **BRAHMAGUPTA** (598–660),
  - **MAHAVIRA** (800(?)–870(?)) és
  - **BHASKARA** (1114–1185(?)).
- A peródus első felében a számokat hol szavakkal, hol más, szám jellegű szimbólumokkal jelölték. A 600-as évek körül kialakult a tízes alapú helyiértékes számírásuk.

Szanszkrit szöveg.



Számírásuk.



1. Hindu aritmetika (200–1200)

A korszak második felétől az eddig csak a számjegy hiányát jelző szimbólumot, a „köröcskét”, számként is kezdték használni. A számjegy hiányának jele arab eredetű.

Mahavira (IX. sz.) a következőket írta:

Egy számot 0-val szorozva 0-t kapunk, s ha egy számból 0-t vonunk ki, akkor a szám nem változik.

Azt is írta, hogy:

Ha egy számot 0-val osztunk, akkor a szám változatlan marad.

Itt nyilván **arra gondolhatott**, hogy ha egy számot „sehány” részre osztunk, akkor nem történik semmi.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- Megjelennek a törtek is, főleg csillagászati számításokban. Írásukra a babyloni hatvanas rendszert alkalmazták. A műveletek elvégzési szabályait szinte ugyanúgy adták meg, mint manapság.
- Mahavira a törttel való osztás szabályaként azt mondta, hogy
  - fordítsd meg és szorozz vele.
- Bevezették a negatív szám fogalmát is hiány jelölésére.
- Először Brahmagupta fogalmazta meg 628-ban a négy alapművelet szabályát negatív számokra.
- Konkrét problémák megoldásánál azonban, ha az egyenlet valamely gyöke (a számolás végeredménye) negatív számnak adódott, akkor azt, mint lehetetlen megoldást, elvetették.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

Például Bhaskara (XII. sz.) véleménye.

...ha egy probléma (pl. egyenlet) megoldásaként 50-et és -5-öt kapott: Ez esetben a második értéket nem lehet figyelembe venni, mert az nem lehet megoldása a problémának, hiszen az emberek nem fogadják el a negatív megoldásokat.

Négyzetgyök.

- Később Bhaskara arra is rámutatott, hogy egy pozitív számnak két négyzetgyöke van, az egyik pozitív, míg a másik negatív. Fölvetette a negatív szám négyzetgyökének kérdését is, de azt mondta, hogy az nem létezik, lévén bármely szám négyzete pozitív.
- **De** mindezt indoklások, pontos definíciók és tételek megfogalmazása nélkül tették, általában verses formában.
- Mindezek ellenére, ha igen lassan is, de a negatív számokat egyre általánosabban fogadták el.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- A hinduk másik nagy lépése az aritmetikában az irracionálisok problémájának egyre korrektebb kezelése. Tőlük vették át az arabok.
- Korrekt módon kezdtek velük is számolni. Nem bizonyították ugyan általánosan eljárásaikat, de bőségesen illusztrálták módszereiket. Például:

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

- Az általános elv, amit használtak, mai jelölésekkel a

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} \tag{1}$$

azonosság, ahol természetesen $a, b > 0$.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- Látható hogy, az irracionálisokkal ugyanúgy bántak, mint az egészekkel. Az (1) azonosság nem más, mint a jól ismert

$$c+d=\sqrt{(c+d)^2}=\sqrt{c^2+d^2+2cd} \tag{2}$$

azonosság, a $c=\sqrt{a}$ és $d=\sqrt{b}$ helyettesítéssel.

Bhaskara a következő eljárást adta meg verbálisan két irracionális összegére:

A nagyobbik és a kisebbik hányadosának négyzetgyökét növeld eggyel, vedd ezen összeg négyzetét, majd szorozd meg a kisebbel, és ennek négyzetgyöke a két négyzetgyök összege.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

Ez az előbbi példánk esetén ez azt jelenti, hogy

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{3}}+1\right)^2\cdot 3},$$

ami természetesen most is $3\sqrt{3}$.

- Fölismerték, hogy egy másodfokú egyenletnek két gyöke van, ami negatív, vagy irracionális is lehet.

2. Irracionálisok a XVI-XVII. században.

- 1500 körül az európai matematikusok, elsősorban az iszlám tradíciók alapján, már egyre kiterjedtebben számoltak gyökmennyiségekkel, speciális típusokat definiáltak és kalkulusokat adtak meg.
- A fő motiváció a gyakorlat és a tudományok igényei.
- Említésre érdemes új eredményeket tartalmaz például az olasz **Luca Pacioli** (1445(?)–1517) *Summa...*, továbbá **Tartaglia** (Nicolo Fontana, 1500(?)–1557) *General trattato de' numeri e misure* című könyve.
- A század második harmadában az irracionálisokkal való számolási technikákat jelentősen továbbfejlesztette a német **Michael Stiefel** (1487–1567) és a flamand hadmérnök **Simon Stevin** (a hollandok „Bolyaija", 1548–1620). Egyre újabb típusait definiálták a gyökmennyiségeknek, és adtak rájuk kalkulusokat.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

- Stiefel például az $\sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b}}$ alakúakra. (Euklidesz X. könyve)
- **Girolamo Cardano** (1501–1576) — a híres *Ars Magna* szerzője — eljárást adott a köbgyököt tartalmazó nevező gyöktelenítésére.
- Stevin egyik legismertebb újítása a tizedesörtek közel mai formájú írása volt.
- A nullát egyre inkább számnak tekintették, de „semminek" nevezték, ami igen sok problémát okozott a negatív számok mibenlétének tisztázásakor.
- Az a kérdés, hogy az irracionálisok, a gyökmennyiségek, számok vagy nem még jó ideig élénk vita tárgya volt.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Stiefel *Arithmetica Integra*, 1544.

Mivel az olyan geometriai bizonyításokban, ahol a racionális számok nem megfelelőek, alkalmazhatók az irracionális számok, és velül elvégezhetjük a bizonyításokat; az irányba kényszerülünk haladni, hogy kijelentsük: az irracionálisok igenis számok, mivel a velük kapott eredmények reálisok (valóságosak). Másrészt azonban más meggondolások arra késztetnek bennünket, hogy tagadjuk azt, hogy az irracionálisok egyáltalán számok. Ugyanis, amikor számolunk velük (tizedestört alakban) azt tapasztaljuk, hogy nem lehet őket pontosan meghatározni. Így nem nevezhetjük őket igazi számoknak, mivel természetüknél fogva hiányzik belőlük a precizitás. Ezért, ugyanúgy mint ahogy a végtelen nem szám, egy irracionális szám sem igazi szám, hanem éppúgy valami ködös végtelen.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Stiefel

A valóságos számok egészek vagy törtek, így az irracionálisok nyilván nem számok.

Blaise Pascal XVII: század

Az olyan mennyiségek, mint például a $\sqrt{3}$ csak geometriai mennyiségként fogható föl. Az irracionálisok pusztán szimbólumok, amelyek nem léteznek az általuk reprezentált folytonos geometriai mennyiségtől függetlenül. A velük való számolásokra tehát nem aritmetikai szabályok vonatkoznak, hanem az Eudoxos-féle arányelméletet (Euklidesz V. könyve) kell alkalmazni.

Isaac Newton (1643-1727)

Az 1707-es *Arithmetica Universalis*-ban lényegében ugyanez van (kb. 30 évvel korábbi eredményeinek összefoglalása).

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Más vélekedések.

- **Simon Stevin**: *az irracionálisok olyan számok, amelyek tetszőleges pontossággal megközelíthetők racionális számokkal.*
- **René Descartes** (1596-1650) 1628-ban kiadott *A gondolkodás szabályai* című könyvében *az irracionálisokat olyan absztrakt számoknak tekintette, amelyek folytonos mennyiségeket reprezentálnak.*
- Az angol **John Wallis** 1685-ben megjelent *Algebra* című könyvében már *teljes jogú számoknak ismerte el az irracionálisokat*, s azon véleményének adott hangot, hogy *az Elemek V. könyve lényegében aritmetikai jellegű.*

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

A problémás negatív számok.

Hasonló gondjaik voltak a „negatív számokkal” is. Iszlám tradíciók alapján számoltak ugyan velük, de a legtöbb matematikus nem tekintette azokat számoknak. Egyenletek megoldásaként többnyire még azok sem fogadták el őket, akik különben hajlamosak voltak számnak tekinteni.

- Legtöbbjük, így Stiefel is, „abszurd számoknak” nevezte őket.
- Girolamo Cardano megadta ugyan az egyenletek negatív gyökeit is, de csak fiktív megoldásoknak, puszta szimbólumoknak tekintette azokat, hiszen a semminél kisebb mennyiségeket reprezentáltak, míg a pozitívokat valósoknak nevezte.
- Hasonlóan vélekedett Descartes is, aki az egyenletek negatív gyökeit hamis gyököknek nevezte, mert azok a semminél kisebb mennyiséget jelölnek, de az egyenlet transzformációjával pozitívvá, azaz — szóhasználata szerint — valóssá tehetők.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Példaként tekintsük Cardano egy feladatát.

Az apa 56, fia 29 éves. Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia?

Ha x jelöli az évek számát, akkor az

$$56 + x = 2(29 + x)$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből $x = -2$. A kapott negatív megoldás **lehetetlen**, ami abból adódott, hogy **rosszul** tűztük ki a feladatot. Azt kellett volna kérdeznünk, hogy „hány évvel ezelőtt” volt az apa kétszer annyi idős, mint a fia

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

- **Blaise Pascal** (1623-1662) a $0 - 4$ kivonást valami teljesen abszurd dolognak tartotta.
- Barátja, a teológus és matematikus Antoine Arnould, érdekes érvet talált a negatív számok ellen.
- Megkérdőjelezte a
$$(-1) : 1 = 1 : (-1)$$
arány korrekt voltát, hiszen, ha $-1 < 1$, akkor a bal oldalon kisebb szám aránylik nagyobbhoz, míg a jobb oldalon fordítva, nagyobb aránylik a kisebbhez. Ezen arányok semmiképp sem lehetnek egyenlők.
- Példája mások figyelmét is fölkeltette.
- Komoly elvi problémát okozott az is, hogy a 0-t „semminek” nevezték.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

1712-ben Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1726) azt írta, hogy

... az ellenkezés jogos, de azért lehet ilyen arányokkal dolgozni, mert korrekt formájúak. Így velük ugyanaz a helyzet, mint a ***képzetesekkel.***

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Egy kis összegzés.

- Az első algebrista, aki elfogadta a negatív számokat az angol **Thomas Harriot** (1560(?)–1621) volt a XVI. század végén, de az egyenletek negatív gyökeit ő is elvetette. Ő használta először kettős értelemben a mínusz jelet.
- Az olasz **Raffaello Bombelli** (1526–1572, a „casus irreducibilis" első megoldója) korrekt definíciót adott a negatív számokra.
- Simon Stevin az egyenletekben ugyan megengedte a negatív együtthatókat, de gyökként már nem.

2. Negatív számok és irracionálisok a XVI-XVII. században.

Említésre érdemes különös véleményt hangoztatott **John Wallis** (1616–1703), aki elfogadta ugyan a negatív számokat, de úgy vélte, hogy azok nem kisebbek a 0-nál, hanem nagyobbak a végtelennél. 1685-ös *Arithmetica Infinitorum* című könyvében úgy érvelt, hogy *a $a/0$ hányados pozitív a-ra végtelen lévén, amennyiben a nevezőt egy negatív b számra cseréljük, akkor az a/b hányadosnak nagyobbnak kell lennie a végtelennél.*

Mielőtt a matematikusok egyöntetű véleményre jutottak volna a negatív és az irracionális számok mibenlétéről egy talán még súlyosabb kérdéssel kerültek szembe, a komplex számokkal. **Ezekről majd később.**

3. Új eredmények az irracionálisokkal kapcsolatban.

- A XVI. század utolsó harmadának egyik nagy eredménye a lánctörtek részbeni újrafölfedezése és újabb alkalmazásai volt.
- Az újdonság az a fölismerés volt, hogy a végtelen lánctörtek jól alkalmazhatók az irracionálisok elméletében is.
- Raffaello Bombelli 1572-es *Algebra* című könyvében találkozunk ezzel először. Ő a $\sqrt{2}$-t a következőképpen közelítette.

Bombelli számolása.

Kiindulási pontja a $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$ egyenlőség volt, amiből először

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{y},$$

majd

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}},$$

adódott. Ezt folytatva az

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}}$$

egyenlőséget kapta.

Bombelli számolásának folytatása (mai fogalmakkal).

- Az eljárást folytatva Bombelli azt kapta, hogy

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}},$$

- azaz

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{2+} + \dots$$

- Azzal természetesen már nem foglalkozott, hogy a végtelen lánctört konvergál-e valamilyen értelemben, hiszen az ilyetén kérdések abban a korban föl sem merültek.

Újabb fogalom: végtelen szorzatelőállítások.

- John Wallis a már említett könyvében végtelen szorzatelőállítást adott π-re:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}.$$

  A konvergencia problémája természetesen nála sem merült föl.
- Könyvében azt is megemlítette, hogy **Lord William Brouncker** (1620-1684), a Royal Society (az Angol Királyi Tudós Társaság) első elnöke, ezen szorzatra a következő végtelen lánctörtet adta meg:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\cdots,$$

  de nem használta semmire.

Újabb végtelen szorzatok.

- Említésre érdemes előzménye volt Wallis eredményének a francia udvari matematikus és csillagász **François Viète** (1540-1603) formulája π-re, amelyet körbe írt 2^k-oldalú ($k \geq 2$) sokszögek segítségével nyert:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdots$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

- A lánctörtek konvergenciaproblémájával is Wallis foglalkozott először az 1695-ös *Opera Mathematica* című könyvében, de csak formális számolásokat végzett megadva a lánctört véges kezdő szeleteit, ő konvergensnek nevezte, sorozatát.

Egy rövid előremutatás.

Végtelen egyszerű lánctörtek.

Legyen $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$. Az

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

kifejezést végtelen egyszerű lánctörtnek nevezzük.

Egyszerű észrevételek.

1. α véges kezdő szeletei sorozata mindig konvergens.
2. E határérték mindig irracionális szám.
3. Ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozat valahonnan kezdve periódikus, akkor α gyöke valamely egész együtthatós másodfokú polinomnak.

„Képzetes számok”.

Cardano feladata.

Bontsuk föl a 10-et két részre úgy, hogy a részek szorzata 40 legyen.

A megoldás.

A feladat az $x(10 - x) = 40$ másodfokú egyenletre vezet, amelyet formálisan megoldva az $5 \pm \sqrt{-15}$ gyököket kapjuk.

Cardano kommentárja.

... ha túltesszük magunkat azon a lelki tortúrán, amit az ilyen szám okoz, formálisan ellenőrizhetjük az eredményt, ami korrekt, de hasztalan.

Bombelli kalkulusa.

A „casus irreducubilis” tárgyalásakor leírta a négy alapművelet elvégzésének szabályait az $a \pm b\sqrt{-1}$ alakú kifejezésekre, de ezeket nem tekintette számoknak, csak haszontalan puszta „szofizmusoknak”.

„Képzetes számok”.

Albert Girard véleménye.

Mire is használhatjuk ezen lehetetlen megoldásokat? Három okunk is van: az általános szabályok bizonyítása, használhatóságuk és mert nincs más megoldás.

Konkluzió.

Lényegében tehát, mint az egyenletek formális megoldását, a komplex megoldások elfogadását ajánlotta, de azt nem fogadták el kortársai.

Descartes.

1. Elutasította, imaginárius (képzeletbeli) megoldásoknak nevezete azokat.
2. Érvelése.
   1. Az egyenletek negatív gyökei az egyenlet transzformációja révén valósokká (azaz pozitívokká) tehetők,
   2. a komplex gyökökkel ezt nem lehet megtenni.

„Képzetes számok”.

Isac Newton.

Nem tulajdonított jelentőséget az egyenletek komplex gyökeinek nyilván azért is, mert nem volt (akkor még) fizikai jelentésük.

G. Leibniz 1702.

Az Isteni Szellem egy nagyszerű megnyilvánulási alkalmat talált az analízis ezen csodájában, az ideális világ e szokatlan tüneményében, amely egyidejűleg létező és nemlétező, amelyet mi a negatív egység imaginárius gyökének nevezünk.

„Képzetes számok”.

Út a megoldások felé.

Mielőtt akár az irracionális, akár a negatív számok kérdésében lényeges előrehaladás történt volna, hosszú és éles, olykor személyeskedő vitában — ha nem is kielégítően — valahogy megoldódott a komplex számok mibenlétének néhány fontos momentuma. A „megoldáshoz”, mint annyiszor, most is kerülő úton jutottak el.

Vita a komplex számok mibenlétéről.

1. forduló: Jacob Bernoulli és G. Leibniz.

- Jacob Bernoulli az $\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2}$ integrál kiszámítására az $x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$ helyettesítést alkalmazta,
- ez $A \int \frac{dt}{t} = A \log t$ alakú, tehát logaritmusfüggvényre vezető integrált eredményezett.
- Később ő is fölfedezte az

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

fölbontást.
- Erre Leibniz is rájött, Johann Bernoullival közösen alkalmazta $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ alakú integrálok kiszámítására is.

Vita a komplex számok mibenlétéről 1.

1. forduló: Jacob Bernoulli és G. Leibniz.

- DE nem foglalkozak azzal, hogy a $b^2 - 4ac < 0$ esetben a gyökök nem valósak,
- így eljárásuk alapján olyan $\int \frac{dx}{cx + d}$ alakú integrálokat is eredményezett, amelyekben legalább a d nem valós (komplex) szám volt.
- Mindezek ellenére nyugodtan használták — formálisan — e módszert,
- ami azt föltételezte, hogy ismerték és használták mind a negatív, mind a komplex számok logaritmusát is.
- Leibniz ki is jelentette, hogy a komplex számok jelenléte semmiféle problémát nem okoz.

Vita a komplex számok mibenlétéről 2.

2. forduló: Johann Bernoulli és G. Leibniz.

- Johann Bernoulli még ennél is tovább ment 1702-ben. Az $\int \frac{adx}{b^2 - z^2}$ integrál kiszámítására a $z = b\frac{t-1}{t+1}$ helyettesítést,
- míg az $\int \frac{dx}{b^2 + z^2}$ integrálnál a $z = \sqrt{-1}b\frac{t-1}{t+1}$ helyettesítést javasolta.
- Ez utóbbi az $\int \frac{-dt}{\sqrt{-12}bt}$ integrálra vezet, ahol már mindenképpen komplex szám logaritmusához jut.

Egy fontos fölfedezés.

Az eredeti integrál az arcus tangens függvényre vezet, így eredménye kapcsolatot teremtett a trigonomertrikus függvények és a logaritmus függvény között.

Vita a komplex számok mibenlétéről 2.

Tisztázandó új kérdések.

1. Léteznek-e a negatív, ill. a komplex számok logaritmusai?
2. Ha igen (ugyanis a követett eljárások ezt igénylik), akkor hogyan definiáljuk azokat?

Leibniz válaszai.

Egy 1712-es dolgozat és levél Johann Bernoullihoz:

- a negatív számok logaritmusai a valóságban nemlétezők,
- azaz imagináriusok (képzeletbeliek).

Johann Bernoulli viszontválasza.

A negatív számok logaritmusai létezők, azaz valóságosak (valós számok).

Vita a komplex számok mibenlétéről 2.

Leibniz érvelése.

- A pozitív logaritmus értékek az 1-nél nagyobb számokhoz tartozok, míg a negatívok a 0 és az 1 közöttiekhez.
- Nincs olyan szám, amely valamely másféle szám logaritmusa lehetne.
- Ha $\log(-1)$ létezne, akkor igaz lenne a $\log(-1) = 2\log(\sqrt{-1})$ egyenlőség is, de ennek jobb oldalán nemlétező mennyiség áll.
- Mondta mindezet integrálási módszerei ismeretében.

Johann Bernoulli érvei.

$\dfrac{d(-x)}{-x} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \log(-x) = \log x$. Lévén $\log 1 = 0$, $\log(-1) = 0$ is áll.

Leibniz kontrája.

A $d(\log x) = \dfrac{dx}{x}$ összefüggés csak pozitív x-ekre áll fönn.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

3. forduló (1727-31): Johann Bernoulli és Leonhard Euler (1707-83) .

Bernoulli fönntartotta korábbi véleményét, amelyet Euler elutasított. Az ő véleménye is meglehetősen ellentmondásos volt ekkor még. Így nem jutottak egyetértésre.

Áttörés, Roger Cotes eredménye 1714-ből.

- A már-már feledésbe merült eredmény (mai jelölésekkel)

$$\sqrt{-1}\Phi = \log(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi).$$

- Ez később alapvetőnek bizonyult.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Euler 1740-es levele Johann Bernoullihoz.

- Egy differenciálegyenlet kétféle megoldásából

$$y = 2\cos x \qquad \text{és} \qquad y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$$

adódik.

- Mivel az egyenletnek egyetlen analitikus függvény tesz eleget következik, hogy

$$\sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \qquad \text{és} \qquad \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2},$$

- Ebből következik Cotes eredménye is.
- Melléktermék: pontos kapcsolat a trigonometrikus és az exponenciális függvények között.
- 1743-ban publikálta ezt.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Egy közbülső de fontos eredmény 1. August de Moivre (1667-1754)

E francia matematikus Nantes-i Ediktum visszavonása miatt menekült Angliába egy 1722-ben publikált dolgozatában (az eredmények 20 évvel korábbiak) azt írta, hogy egy igen érdekes összefüggést talált két adott arányú szög sinus versusai között. E szögfüggvény ma már nem használatos: $\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha$.

- Azt állította, hogy ha két szög aránya $1: n$ és x, t jelöli rendre sinus versusaikat, akkor rájuk fönnállnak az

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t \qquad \text{és} \qquad 1 - 2z + z^2 = -2zx$$

egyenletek.

- Ezekből a z kiküszöbölése után, és az $x = \operatorname{vers}\varphi = 1 - \cos\varphi$, $t = \operatorname{vers} n\varphi = 1 - \cos n\varphi$ helyettesítésekkel az kapható, hogy

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Egy közbülső de fontos eredmény 2. August de Moivre (1667-1754)

- $$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi.$$
- E formulában Moivre-nál $n > 0$ egész.
- Euler később megadta általánosítását tetszőleges valós kitevőre, de eredménye nem volt korrekt.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli 1.

1. Leibniz állítása, hogy a $d(\log x) = dx/x$ összefüggés csak $x > 0$-ra igaz „árnyékba borítja az analízis alapjait, amely szerint azok általános elveket tartalmaznak". E formula is általános.
2. Bernoulli érveléséből, miszerint $\dfrac{d(-x)}{-x} = \dfrac{dx}{x}$, pusztán az következik, hogy $\log x$ és $\log(-x)$ egy additív konstansban — amely éppen $\log(-1)$ — különbözik.
3. Bernoullinak a $\log(-1) = 0$ állítását korrekten bizonyítania kellett volna.
4. Azon érvelése ugyanis, hogy a $(-a)^2 = a^2$ egyenlőség alapján $\log(-a)^2 = \log a^2$, amiből $\log(-a) = \log a$ következik nem korerkt,
5. hiszen $(a\sqrt{-1})^4 = a^4 \implies \log a = \log(a\sqrt{-1}) = \log a + \log(\sqrt{-1})$, azaz $\log(\sqrt{-1}) = 0$.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli 2.

- Bernoulli azonban más helyen azt állította, hogy $\log(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\frac{\pi}{2}$.
- Leibniz (Newton és Gregory eredménye alapján):

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

- amiből az $x = -2$ helyettesítéssel a

$$\log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \dots$$

- végtelen sor adódik, amiből már jól látható, hogy $\log(-1) \neq 0$, sőt nem is létezik.
- Euler válasza: sorokkal érvelve itt semmit sem érünk el.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli 3.

- hiszen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i,$$

- amelyből $x = -3$ és $x = 1$ helyettesítésekkel, majd a két sort összeadva kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$$
$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \ldots$$

- és az utolsó egyenlőség pedig már nyilván lehetetlen.

Euler megoldása 1.

Egy végtelen sor mai szimbolikával.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Az e végtelen összegként való ismert előállítása alapján

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

ahol i egy végtelen nagy számot jelöl.

- Mindkét oldalból i-edik gyököt vonva

$$x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}, \qquad \text{azaz} \qquad y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1).$$

adódik.

Euler megoldása 2.

- Mivel $x^{\frac{1}{i}}$ egy végtelen nagy kitevőjű gyök (lévén $1/i$ végtelen kicsi kitevő), az y-ra végtelen sok komplex értéket kapunk,
- továbbá $y = \log x$, ezért $\log x$-nek is végtelen sok komplex értéke van.
- Pontosabban fogalmazva, ha

$$x = a + b\sqrt{-1} = c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

akkor a c helyett e^C-t írva

$$x = e^C(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = e^C e^{\sqrt{-1}(\varphi \pm 2\lambda\pi)},$$

- így

$$y = \log x = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1},$$

ahol λ tetszőleges nemnegatív egész szám.

Euler megoldása 3.

Euler kommentárja.

...valamely adott pozitív valós számnak egyetlen valós és végtelen sok képzetes logaritmusa van, míg a negatív és a képzetes számok logaritmusának minden értéke képzetes, tehát imaginárius, azaz „képzeletbeli”.

Záró megjegyzések.

1. Megjegyzés.

E zseniális megoldásával nem aratott osztatlan sikert. Például D'Alambert, aki a Nagy Francia Enciklopédia matematika fejezetét összeállította, analitikus, geometriai és metafizikus érvek sorát adta a $\log(-1) = 0$ egyenlőség elfogadása érdekében.

2. Megjegyzés.

- Euler gondolatmenet mai szemmel is brilliáns, de
- bár korrekt eredményre vezet
- mai értelemben teljesen inkorrekt.
- Mentségül: **Euler zseni volt.**