Euklidesz V. posztulátumától a Nem-Euklideszi geometriákig.

Néhány lépés a 2000 éves úton.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. november 10.

A kezdet.

Az V. posztulátum.

Követeltessék meg, hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabítva találkozzék azon az oldalon, amerre az két derékszögnél (összegben) kisebb szögek vannak.

- **Emlékezzünk.** Ez a posztulátum „kakukktojás" a többi négy mellett, nem olyan „ön-evidens" állítás a fizikai térről, mint azok.
- 2000 éven keresztül kételyek sora merült föl, amelyek eloszlatásán sokan dolgoztak. Ezek alapvetően két föltevésen alapultak.

A kételyek.

A két föltevés.

1. Az V. posztulátum egy tétel, ezért helyébe, a posztulátumok sorába, egy egyszerűbbet, a többi négy posztulátumhoz hasonlót kellene illeszteni.
2. Törölhető a posztulátumok közül: az V. posztulátum egy tétel, amit be lehet/kell bizonyítani az első négy posztulátum alapján.

Euklidesz kételyei: definíció és tételek az 1. könyvből.

- **I.23. Definíció.** Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabítva egyiken sem találkoznak.
- **I.27. Tétel.** Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

Tételek az Elemekből.

Euklidesz kételyei: definíció és tételek az 1. könyvből.

- **I.28. Tétel.** Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.
- **I.29. Tétel.** Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.
- **I.30. Tétel.** Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.
- Euklidesz **először** a 29. Tétel bizonyításában hivatkozott az V. Posztulátumra, bár korábban is hasznos lett volna.

Ókori kommentárok.

Proklosz

Az első, ókori kísérletekről az V. századi neoplatonista filozófus, **Proklosz** kommentárjaiból tudunk. Az első kettő a I.e. I. században élt POSZIDONIOSZ és GEMINOSZ nevéhez fűződik.

Poszidoniosz.

Definíció. *Azon egy síkban fekvő egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak, amelyek mindenütt egyenlő távolságban vannak egymástól.*

Geminosz vélekedése.

Euklidesz definíciója értelmében párhuzamosnak kellene tekinteni a hiperbola ill. a parabola aszimptotáját és magát a görbét, hiszen azok sem metszik egymást, de Poszidoniosz definíciója ezt kizárja.

Ókori kommentárok.

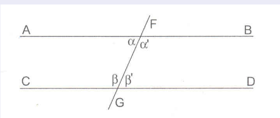
Proklosz.

Kimutatta, hogy egyik sem vezet semmi jóra, sőt Geminosz észrevételét a geometria talán legnagyobb paradoxonának tekintette, s mindkettőt elvetette.

Az első helyettesítési kísérlet.

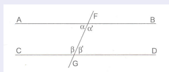
Klaudiosz Ptolemaiosz

- Az I.sz. II. századi csillagász érvelése.
- Legyen *AB* és *CD* két párhuzamos egyenes, s jelölje az *FG* metsző egyenes által létrehozott 2-2 belső szöget α, β és α', β'.



Az első helyettesítési kísérlet.

Klaudiosz Ptolemaiosz érvelése:

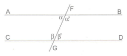


- Három lehetőség van.
- $$\alpha + \beta \begin{cases} > \alpha' + \beta' \\ = \alpha' + \beta' \\ < \alpha' + \beta' \end{cases}$$

A javasolt posztulátum.

Ha az előbbi lehetőségek valamelyike teljesül egy esetben, akkor mindig az áll fönn.

Az első helyettesítési kísérlet.



Az első lehetőség.

Ha $\alpha + \beta > 2R$, akkor

$$FB \parallel GD, \quad \text{és} \quad FA \parallel GC,$$

amiből a posztulátum szerint

$$\alpha' + \beta' > 2R \;\Rightarrow\; \alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4R,$$

ami lehetetlen. (R a derékszöget jelöli itt és a továbbiakban.)

A harmadik lehetőség.

Ugyanúgy tárgyalható, mint az első.

Az első helyettesítési kísérlet.

A konklúzió.

Mivel e két eset nem lehetséges marad a harmadik (a középső), tehát szükségképp

$$\alpha + \beta = 2R,$$

amiből levezethető az V. Posztulátum.

Proklosz véleménye:

Ptolemaiosz posztulátuma semmivel sem egyszerűbb Euklideszénél, nem is rövidebb.

Proklosz javaslata.

Két egymást metsző egyenes egy-egy pontjának távolsága akármilyen nagy lehet, ha az egyeneseket elegendően meghosszabítjuk.

Az első helyettesítési kísérlet.

Proklosz tétele.

Azon egyenes, amely két párhuzamos egyenes valamelyikét metszi, metszi a másikat is.

G. Saccheri (XVIII. sz.)

Proklosz sem oldotta meg a problémát. Igazolta, hogy e posztulátum (is) ekvivalens az eredetivel, föltéve, hogy két párhuzamos egyenes távolsága mindig véges. (Ennek ellenkezője a görögöknél föl sem merülhetett.)

Az iszlám matematikusok kísérletei 1.

Omar Khajjam: Kommentárok Euklidész könyvében található nehézségekhez.

- **Khajjam posztulátuma:** *Két összetartó (egymáshoz közeledő) egyenes metszi egymást, és lehetetlen, hogy két összetartó egyenes vonal távolodna egymástól az összetartás irányában.*
- Kommentárja szerint ezen elvet Arisztotelesz egy műve alapján fogalmazta meg, de az általa említett mű nem ismert a mai napig.
- **Megjegyzés.** Látni fogjuk, hogy ez (is) „zsákutca”, mert egy állítást kettőre cserélt, és mindkettő utóbb ekvivalensnek bizonyult Euklideszével.

Az iszlám matematikusok kísérletei 2.

Omar Khajjam tételei.

- Az első: *Egy adott egyenesre merőleges két egyenes mindenütt egyenlő távolságra van.*
- 8 továbbival együtt ez helyettesíthetné az I.29. Tételt.
- Bizonyításában alapvető volt a már korábban is említett ún. Archimédész-Eudoxosz posztulátum, amelyet itt Hilbert megfogalmazásában adunk meg.

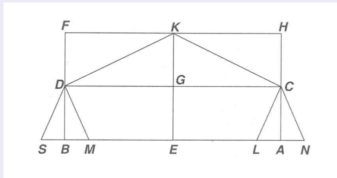
Archimedesz-Eudoxos posztulátum.

Legyen A_1 tetszőleges pont valamely egyenesen a rajta fekvő A és B pontok között. Vegyünk föl ezen egyenesen olyan $A_2, A_3, \ldots$ pontsorozatot, amelyre A_1 az A és A_2, az A_2 A_1 és A_3 között fekszik, s így tovább. Továbbá legyenek az AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ szakaszok mind egyenlők. Ezen pontsorozatban van olyan A_n pont, hogy B az A és az A_n pontok közé esik.

Az iszlám matematikusok kísérletei 3.

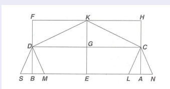
Omar Khajjam legfontosabb eredménye e témában.

- Egy ahhoz hasonló négyszöget vizsgált, amely évszázadokkal később G. Saccheri meggondolásaiban is alapvető szerepet játszott.
- A négyszög



Az iszlám matematikusok kísérletei 4.

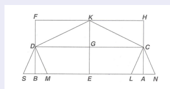
A konstrukció 1.



- Az AB szakasz két végpontjába állítsunk egyenlő hosszúságú AC és BD merőleges szakaszokat, majd kössük össze a C és D pontokat.
- A következőket igazolta.
- A C és a D csúcsoknál levő (belső) szögek egyenlők.
- Ha az AB oldal E felezőpontjába merőlegest állítunk, amely G-ben metszi a CD oldalt, akkor G ezen oldal felezőpontja.

Az iszlám matematikusok kísérletei 5.

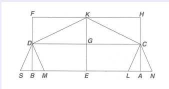
A konstrukció 2.



1. A C és D pontoknál levő (egyenlő) szögekre a következő esetek lehetségesek:
   1. mindkettő hegyesszög,
   2. mindkettő tompaszög,
   3. mindkettő derékszög.
2. Ha kizárjuk az első kettőt, akkor már könnyen adódik, hogy a harmadik ekvivalens az V. posztulátummal.
3. Folytassuk a konstrukciót.

Az iszlám matematikusok kísérletei 6.

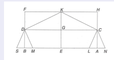
A konstrukció 3.



1. $GK = EG$, majd K-ban EK-ra merőlegest állítva az oldalak meghosszabbításával metszve adódik H, F, és $CH = DF$.
2. Az ábrát CD mentén „kettéhajtjuk”.
3. Ha 1.1. teljesül, akkor HF az AB alapnál hosszabb SN szakaszba megy át,
4. ha pedig 1.2. teljesül, akkor a nála rövidebb LM szakaszba.
5. Végül a kapott ábrát tükrözzük AB-re.

Az iszlám matematikusok kísérletei 7.

Khajjam konklúziója.



1. Belátható, hogy az első, az 1.1. esetben az AB szakaszra állított két merőleges, az AC és a BD, ezen szakasz (mármint az AB) mindkét oldalán távolodik egymástól,
2. míg a második, az 1.2. esetben közelednek egymáshoz.
3. Mindkettő ellentmond azonban azon állításnak, amint az előbb Tételként fogalmaztunk meg és bizonyítottunk be.
4. Ezzel igazoltuk az V. Posztulátum állítását, hiszen csak a harmadik, az 1.3. eset lehetséges, ami — mint már említettük — ekvivalens vele.

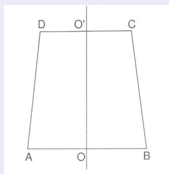
Az európai matematikusok kísérletei 1.

- Az európai matematikusok a XVI. századtól kezdve foglalkoztak a párhuzamosok problémájával, mert csak ekkorra váltak ismertté számukra az alapvető görög és iszlám források (zömmel arab közvetítéssel).
- Az első érdemi eredmények az 1667 és 1733 között élt olasz jezsuita szerzetes és a Pavia-i Egyetem professzora Gerolamo Saccheri nevéhez fűződtek.
- Halála évében jelent meg Milánóban az „Euclides ab omni naevo vindicatus ...” (Euklidesz megvédetett minden támadástól ...) című könyve amelyben összefoglalta a párhuzamosokkal kapcsolatos vizsgálatait, amelyek az V. Posztulátum bizonyítását célozták.
- Vizsgálataiban alapvető szerepe volt egy olyan négyszögnek, amely lényegében megegyezett Omar Khajjam négyszögével.

Az európai matematikusok kísérletei 2.

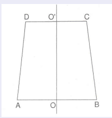
Saccheri eredményei 1.

- Első lépése a következő lemma volt.
- Ábra



- **Lemma.** *Ha az ABCD négyszögben az A és B csúcsoknál levő szögek derékszögek és az AD valamint a BD oldalak egyenlők, akkor a C és D csúcsoknál levő szögek egyenlők. Ha azonban e két oldal különböző, akkor a C és a D csúcsoknál levő szögek is különbözők, mégpedig az a nagyobb, amely a rövidebb oldalnál van.*

Saccheri eredményei 2.



Legyen a továbbiakban az A és a B-nél levő szög derékszög. 3 hipotézis fogalmazható meg.

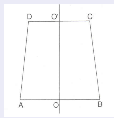
- **Derékszög hipotézis:** (ekvivalens az V. Posztulátummal)

$$\angle C = \angle D = \text{derékszög}.$$

- **Tompaszög hipotézis:** $\angle C = \angle D >$ derékszög.
- **Hegyesszög hipotézis:** $\angle C = \angle D <$ derékszög.

Saccheri eredményei 3.

Saccheri 1. Tétele.



1. Tétel. *Tekintve rendre az előbbi hipotéziseket kapjuk, hogy* $AB = CD, \quad AB > CD, \quad AB < CD.$

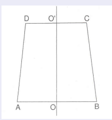
Bizonyítás.

A lemmát fogjuk használni.

- A derékszög hipotézis alapján nyilvánvaló, hogy $AB = CD$.
- Tekintsük ezután a tompaszög hipotézist, és állítsunk egy OO' merőlegest az AB oldal felezőpontjába.

Saccheri eredményei 4.

Bizonyítás. (folytatás)



- Ezen szakasz négyszögünket két egyenlő részre osztja, s mind az O, mind az O' csúcsoknál levő belső szög derékszög.
- A Lemma alapján $AO > DO$, s így $AB > CD$.
- Ha pedig a hegyesszög hipotézist vesszük alapul, akkor hasonló érveléssel adódik, hogy $AB < CD$.

Megjegyzés.

Az itt szereplő négyszögre Saccheri-négyszögként fogunk hivatkozni.

Saccheri eredményei 5.

Saccheri további tételei 1.

2. Tétel. *Ha az előbbi hipotézisek valamelyike teljesül egy adott Saccheri-négyszögben, akkor valamennyi Saccheri-négyszögben e hipotézis teljesül.*

3. Tétel. *Ha rendre a derékszög, a tompaszög ill. a hegyesszög hipotézis bizonyul igaznak, akkor a háromszögek belső szögeinek összege két derékszög, nagyobb két derékszögnél, ill. kisebb két derékszögnél.*

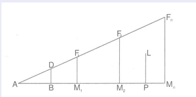
4. Tétel. *Ha egy háromszög belső szögeinek összege két derékszöggel egyenlő, vagy nagyobb két derékszögnél, vagy kisebb két derékszögnél, akkor rendre ugyanaz teljesül bármely háromszögben.*

Saccheri eredményei 6.

Saccheri további tételei 2.

5. Tétel. (Két tétel egyesítve.) *Tegyük föl, hogy vagy a derékszög, vagy a tompaszög hipotézis teljesül. Az olyan egyenes amely merőleges egy adott egyenesre és ez utóbbit egy további egyenes hegyesszögben metsz, akkor az egyenes ez utóbbit is metszi.*

- Bizonyítás helyett tekintsük a következő ábrát. A tétel szerint a PL egyenes metszi a háromszög átfogóját.

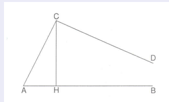


Saccheri eredményei 5.

Saccheri konklúziója.

7. Tétel. *Az V. Posztulátum igaz mind a derékszög-, mind a tompaszög hipotézis mellett.*

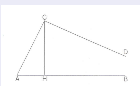
Bizonyítás. Tekintsük a következő ábrát, ahol az AB és a CD egyenesek metszik az AC egyenest,



- és tegyük föl, hogy $\angle BAC + \angle ACD < 2R$.
- Ekkor az előbbi két szög közül az egyik, mondjuk a BAC szög hegyesszög. A C pontból húzzunk merőlegest AB-re, ez a CH egyenes.

Saccheri eredményei 7.

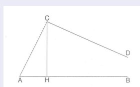
Saccheri konklúziója.



- Föltételünk szerint az ACH háromszögben
$$\angle A + \angle C + \angle H \geq 2R.$$
- Mi azonban azt tételeztük föl, hogy
$$\angle BAC + \angle ACD < 2R.$$
- Ez utóbbi két egyenlőtlenségből az következik, hogy $\angle AHC > \angle HCD$.

Saccheri eredményei 8.

Saccheri konklúziója.



- Ezért a HCD szögnek hegyesszögnek kell lennie, mivel H-nál derékszög van. Az 5. Tétel alapján az AB és a CD egyenesek metszik egymást. Saccheri szerint ez azt jelenti, hogy a tompaszög hipotézis hamis.
- Mivel a két esetben Euklidész posztulátuma teljesül, igazak a belőle levezetett tételek is. Tehát a négyszöge belső szögeinek összege 4 derékszög, ami a derékszög hipotézist igazolja.
- Még nem érte el végcélját: be kellet még látnia, hogy a hegyesszög hipotézis sem állhat fönn.

Saccheri eredményei 9.

A végső konklúzió előtt néhány további állítása..

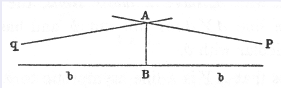
- *Ha van két olyan egy síkban levő egyenes, amelyek nem metszik egymást, és nincs olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges lenne, akkor ezek aszimptotikusok.*
- **Megjegyzés.** Ez megerősíti azon ókori görög vélekedést, hogy léteznek egy síkban levő aszimptotikus egyenesek.
- *Ha teljesül a derékszög- vagy a hegyesszög hipotézis, akkor egy metsző egyenespár egyikén levő pont távolsága a másik egyenestől minden határon túl növekszik, ha a pont távolodik az egyenesen.*

Saccheri eredményei 10: végső konklúziók.

Összegző tétele.

Ha a hegyesszög hipotézis igaz, akkor adott b egyenes és rajta kívül fekvő A pont esetén léteznek olyan az A ponton áthaladó p és g egyenesek jobbra ill. balra haladva aszimptotikusak a b egyeneshez és az A ponton áthaladó egyeneseket két csoportra osztják. Az egyikbe azok tartoznak, amelyek metszik a b egyenest, míg a másikba azok, amelyeknél az A pontból a b-re húzható merőlegesek egybeesnek.

Ábra.



Saccheri eredményei 11: végső konklúziók.

1. *Ha két egyenes folytonosan közeledik egymáshoz úgy, hogy távolságuk mindig meghalad egy adott távolságot, akkor a hegyesszög hipotézis lehetetlen.*
2. Ebből következik, hogy ha posztuláljuk, hogy nem léteznek aszimptotikus egyenesek, akkor el kell fogadnunk Euklidész posztulátumát.
3. Az előbbiek alapján fontos döntés előtt állt.
   1. A bizonyított állításoknak, a logikai érveléseknek hisz, vagy
   2. intuícióiban, az évezredes beidegződésben bízik.
4. A döntése:
5. A hegyesszög hipotézis abszolút hamis, mert teljesen visszataszítóvá teszi az egyenesek viselkedését.
6. Ezzel eljutott könyve címéhez: EUKLIDÉSZ MEGVÉDETETT MINDEN TÁMADÁSTÓL.

Összegzés.

- TALÁN Ő VOLT AZ ELSŐ MATEMATIKUS, AKI OLYAN PONTIG JUTOTT EL, AHONNAN MÁR CSAK EGY LÉPÉS VÁLASZTOTTA EL ATTÓL, HOGY KIJELENTSE
- „NEM BIZTOS, HOGY EUKLIDESZ GEOMETRIÁJA AZ EGYETLEN LEHETSÉGES ÉS ÍGY ABSZOLÚT”, LÉTEZHETNEK MÁS GEOMETRIÁK IS,
- PÉLDÁUL OLYANOK, AMELYEKBEN NEM A DERÉKSZÖG HIPOTÉZIS TELJESÜL, HANEM A TOMPASZÖG HIPOTÉZIS, VAGY A HEGYESSZÖG HIPOTÉZIS.
- Egy későbbi „fajsúlyos probléma”: I. Kant véleménye.

Néhány állítás, amely ekvivanens az V. posztulátummal.

1. Playfair Posztulátuma: Adott egy l egyenes és egy P pont úgy, hogy $l \notin P$. Pontosan egy olyan egyenes létezik P-n keresztül (a P és az l által meghatározott síkban), amely párhuzamos l-lel.
2. Egy háromszög (belső) szögeinek összege 2 derékszög.
3. Létezik négyzet a geometriánan.
4. A Saccheri négyszögben a „felül levő" szögek derékszögek.
5. Léteznek hasonló, de nem egybevágó háromszögek a geometriában.
6. A félkörbe írt szög derékszög (a félkörhöz tartozó kerületi szög derékszüg).
7. Bármely három, nem egy egyenesre eső, ponton át kör rajzolható.
8. A párhuzamosság tranzitív reláció. (Euklidesz: Elemek, I.30.)
9. Azon egyenes szakasz hossza, amely egy háromszög két oldalának felezőpontját köti össze feleakkora hosszúságú, mint a háromszög harmadik oldala.
10. Létezik két olyan egyenes, amelyek mindenütt egyenlő távolságra haladnak egymástól.

Saccheri hatása.

G.S. Klügel (1763. Helmstädt)

"Az a bizonyosság, amely alapján elfogadjuk Euklidesz párhuzamossági posztulátumát, tapasztalati tényen alapul."

- Ez az első olyan leírt vélemény, miszerint egy posztulátum nem valami ön-evidens állítás, hanem tapasztalaton, kísérleten alapuló kijelentés is lehet.
- Következtetése: Saccheri nem jutott ellentmondásra, pusztán egy olyan eredményt ért el, amely valami más tapasztaláson nyugszik.

J. H. Lambert

Theorie der Parallellinien (1766, 1786): egy olyan négyszöget tekintett, amelyben 3 derékszög volt. Megvizsgálta milyen lehet a negyedik szög.

J. H. Lambert.

- Tapasztalatai: ha tompaszög, akkor ellentmondásra jutott, ezt a lehetőséget elvetette. Ellentétben Saccherivel, nem tapasztalt ellentmondást, ha hegyesszögnek tételezte föl.
- Megvizsgálta — az elvetett — tompaszög, és a megtartott hegyesszög hipotézis néhány következményét.
- Néhány megállapítása: Mindkét hipotézis mellett a sokszögek területe arányos az ún. szögdefektussal, a belső szögek összegének $(2n-4)R$-től való eltérésével. (Saccheri: $n = 3$.)
- A tompaszög hipotézis olyan eredményekre vezet, amelyek hasonlatosak a gömbfelületen érvényesekhez.
- A hegysszög hipotézis esetén olyan állításokat kapott, amelyek képzetes sugarú gömb felületén lennének érvényesek.
- Egy mellékterméke vizsgálatainak: eljutott a trigonometrikus függvények kiterjesztéséhez komplex argumentumokra.
- Fontos megállapítása: hipotézisek olyan együttese, amely nem vezet ellentmondásra, elvezethet egy újabb geometriához.

A Göttingeniek.

K. Schweikart

1818-ban Gausshoz küldött 1816-os dolgozatában megkülönböztetett két geometriát:

- az egyikben a háromszögekben a belső szögek összege $2R$,
- a másikban kisebb, vagy nagyobb, mint $2R$. (**Megjegyzés.** R a derékszöget jelöli.)
- Az utóbbiak közül azt geometriát, amelybe a szögösszeg kisebb $2R$-nél, „asztrális geometriának" nevezte, mert az a „csillagok világában" lehetne érvényes.
- Ez hasonlatos Saccheri és Lambert hegyesszög hipotéziséhez.

A Göttingeniek.

F. A. Taurinus (Schweikart unokaöccse): Geometrie Prima Elementa (1826).

A zömmel analitikus geometriával foglalkozó könyvben azt írta, hogy „… az Euklideszi geometria nem írja le a fizikai teret, és az asztrális geometria logikailag konzisztens."

Összegzések (Saccheri hatása):

- Klügel, Schweikart és Taurinus, valamint a göttingeni A. G. Kästner meg voltak győződve arról, hogy Euklidesz V. posztulátuma nem bizonyítható a többiből, tehát független azoktól.
- Lambert-Schweikart-Taurinus: úgy vélték, hogy egy alternatív posztulátummal logikailag konzisztens más geometria építhető ki.
- Lambert nem említett alkalmazási lehetőséget, Schweikart és Taurunus szerint a fizikai tér ilyen lehet, a csillagok világában érvényes geometriát kaphatunk.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

Életének néhány állomása:

- 1795 (egyetemi évek Göttingen): eljárás a szabályos 17-szög szerkesztésére.
- Helmstädtban doktorál J. F. Pfaff-nál 1798-ban, értekezése legfőbb eredmény a (klasszikus) algebra alaptételének bizonyítása. Utána visszamegy Brunswickba, megírja egyik fő művét, a Disquisitiones Arithmeticae-t 1801-ben.
- 1794-ben igazolta, hogy a négyszög területe arányos a defektussal.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

Életének néhány állomása:

- Levél Bolyai Farkasnak (1799): „A párhuzamossági posztulátum bizonyításában bizonyos haladást értem el, de a siker messze nem teljes. Például, ha igazolni tudnám, hogy létezik tetszőlegesesen nagy területű egyenlőszárú háromszög, akkor igazolhatnám az egész Euklideszi geometriát. Eddig azonban mindig csak oda jutottam, hogy a terület korlátos. Többen javasolták, hogy legyen az előbbi egy posztulátum, de és azt elvetettem. Egyre erősödik azon megérzésem, hogy az V. posztulátum nem igazolható a többiből, így komolyan kellene venni új, lehetséges geometriák kialakítását."
- 1807-ben meghívják az asztronómia professzorának Göttingenbe.
- 1813-as irataiban olvasható (csak halála után kerültek elő), komolyan fölvetette egy másik, anti-Euklideszi, vagy asztrális geometria létezését, amit később nem-Euklideszinek nevezett.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

Életének néhány állomása:

- 1827-ben jelenik meg Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas c. könyve, amelyben a felületek geometriájában (a görbült terekkel kapcsolatban) elért eredményeit összegezte.
- Göttingeni éveiben W. Weberrel közösen megteremtették a modern értelemben vett elméleti fizika (a „matematikai fizika") alapjait a mágnességre és az égitestek mozgására vonatkozó vizsgálataikkal.

A nem-Euklideszi geometriákról.

- A nem-Euklideszi geometriákkal (amelyekben nem érvényes az V. posztulátum) kapcsolatban nem publikált semmit, csak néhány levele maradt fönn.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

A nem-Euklideszi geometriákról.

- 1829-ben megírta Besselnek, hogy „valószínűleg soha sem fogom publikálni ezen eredményeimet, mert azok annyira meglepőek, furcsák.” DE alkalmazkodva a göttingeni tradíciókhoz a kérdés továbbra is foglalkoztatta: már 15 évesen is úgy vélte, hogy létezhetnek olyan konzisztens geometriák, amelyekben nem érvényes az V. posztulátum.
- 1817-es levele Olbersnek: „Egyre jobban meg vagyok győződve arról, hogy az Euklideszi geometria fizikai szükségszerűsége nem igazolható, legalább is emberi elmével (kis engedmény Kant-nak). Lehet, hogy egy másik életben bepillanthatunk a tér természetébe, de az most elérhetetlen. ... Addig nem tehetjük a geometriát ugyanabba sz osztályba, ahol pl. az aritmetika van, amely tisztán a priori, inkább olyan, mint a mechanika.”

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

Gauss híres kísérlete.

3 hegycsúcs, a Brocken, a Hohehagen és az Insekberg alkotta 69, 85 és 197 km oldalhosszúságú háromszög belső szögeit megmérve azt kapta, hogy az összeg $14,85$ másodperccel nagyobb $180°$-nál. Ezen eltérés kisebb a mérési hibánál, tehát nem dönt el semmit.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

A nem-Euklideszi geometriákról, összegzés.

Gaussnak megvolt az intellektuális bátorsága ahhoz, hogy komolyan foglalkozzon azzal a kérdéssel, hogy létezhetnek olyan geometriák, amelyekben nem érvényes az V. posztulátum, és az ilyen geometriáknak lehetnek fizikai alkalmazásai, lehet, hogy a fizikai térben egy ilyen geometria érvényes. DE morálisan nem merte fölvállalni a szakítást Kant azon nézetével, miszerint a fizikai tér Euklideszi volta az a priori tudásunk része.

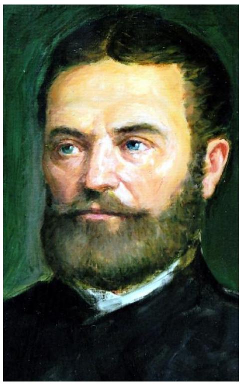
Morris KLINE (A XX. század egyik leghíresebb matematikatörténésze) véleménye.

A döntő lépést két olyan matematikus tette meg, akiknek nemcsak intellektuális bátorsága volt ahhoz, hogy szakítsanak egy 2000 éves dogmával, hanem morális tartásuk is volt ahhoz, hogy vizsgálataik eredményét a nyilvánosság elé tárják.

Nyikolaj Ivanovics LOBACSEVSZKIJ (1793-1856)

- Göttingenben J. C. Bartelsnél tanult tanára révén megismerkedett a párhuzamosok problémájával. Különösen Legendre azon eredménye inspirálta, miszerint
- a háromszögek belső szögeinek összege nem haladhatja meg $2R$- et,
- Ha van olyan háromszög, amelyben az összeg pontosan $2R$, akkor ez minden háromszögben teljesül.
- 1826-ban írta első cikkét a párhuzamosokról, de ez elveszett.
- 1829-30-ban 2 cikket közölt egy Kazan-i és egyet egy német folyóiratban. Elküldte eredményeit a Pétervári Akadémiának, de ott érdektelennek tartották (Osztrogradszkij véleménye alapján).
- 1840-ben könyv formájában német nyelven foglalta össze eredményeit, és elküldte Gaussnak. Ő meghívta Göttingenbe.
- Geometriájának végső formája egy 1855-ös (már vakon írt) könyvében jelent meg.

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)



Márkos Ferenc festménye

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)

- Részlet az 1823-as Temesvári levélből: „Egy olyan csodálatos fölfedezést tettem, amely engem is meglepett. A semmiből egy új, más világot teremtettem.”
- Ez az utalás arra, hogy eljutott az ún. hiperbolikus geometriához, amelyben egy egyenessel egy rajta kívüli ponton át a kettőjük által meghatározott síkban két párhuzamos, és végtelen sok nem-metsző egyenes húzható.
- Eredményét egy latin nyelvű függelékként (Appendix) jelentette meg apja Tentamen című ugyancsak latin nyelvű 1832-es könyvében „A tér abszolút tudománya” címmel.
- Apja elküldte Gaussnak, aki csak annyit válaszolt, hogy „nem dícsérhetem, mert akkor magamat dícsérem”.

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)