

Tételjegyzék, matematika tanár MSc, 2010

1. Konvexitás, konvex kombináció, konvex burok, Charatheodory tétel
2. Helly tétel, konvex halmaz köré írható kör
3. Adott szélességű konvex halmazba írható kör, Santalo transzverzális
4. Konvex halmazok Minkowski összege
5. Sokszögek átdarabolása
6. Átdarabolás eltolásokkal
7. Hausdorff távolság, approximációs tételek
8. Terület, kerület értelmezése, folytonossága a Hausdorff metrikában
9. Steiner formula, Cauchy formula
10. Poliéder, Euler formula, korlát a lapok, élek számára
11. A (c, e, l) hármassok jellemzése
12. Poliéderek kombinatorikus izomorfizmusa
13. Poliéderek élgráfjának tulajdonságai, Steinitz tétel
14. Poliéderek merevsége, Cauchy tétel

Gyakorló feladatsor

1. A $(3, 6)$ pont benne van-e a $(0, 0)$, $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 5)$, $(1, 6)$ pontok konvex burkában? Ha igen, állítsuk elő a pontok konvex kombinációjaként.
2. A $(2, 2, 1)$ pont benne van-e a $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 1, 6)$ pontok konvex burkában?
3. a) Határozzuk meg a $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ csúcsú háromszöglap és a $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ csúcsú háromszöglap Minkowski összegét.
b) Határozzuk meg a $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 3)$ háromszög és a $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$ négyzet Minkowski összegét.
c) Hány csúcsa lehet egy szabályos háromszög és egy négyzet Minkowski összegének a síkon?
d) Határozzuk meg a $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ csúcsú háromszöglap és az origóra vonatkozó centrális tükrképének a Minkowski összegét.
4. Határozzuk meg a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ végpontú szakasz és a $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ pontok által meghatározott tetraéder Minkowski összegének csúcsait.
5. Igaz-e, hogy egy tetraéder és egy szakasz Minkowski összegének mindig van
a) paralellogramma lapja.
b) legalább két paralellogramma lapja.
c) legalább két háromszög lapja.
6. a) Húzzuk meg egy r sugarú kör egy átmérőjét. Határozzuk meg a keletkezett két félkör lap Minkowski összegét, valamint annak területét, kerületét.
b*) Egy r sugarú gömböt a középpontjára illeszkedő síkkal két félgömbre vágunk. Határozzuk meg a keletkezett két félgömb Minkowski összegét, valamint annak térfogatát, felszínét.
7. Mely halmazok állnak elő körlapok metszeteként.
8. A gömbfelületen adott egy u zárt görbe, aminek a hossza kisebb, mint 2π . Igazoljuk, hogy ekkor u rajta van egy félgömbön.
9. Az egyenesen adott véges sok szakasz úgy, hogy bármely 3 között van 2 metsző. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van 2 pont, hogy bármely szakasz tartalmazza valamelyiket a kettő közül.
10. K_1, \dots, K_n kompakt konvex halmazok a síkon úgy, hogy bármely 3 metszete legalább 1 szélességű. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes metszete legalább 1 szélességű.
11. Igazoljuk, hogy bármely $K \subseteq E^2$ kompakt konvex halmazhoz létezik x pont, hogy $-K \subseteq x + 2K$.

12. Bármely n elemű síkbeli ponthalmazhoz létezik egy pont, hogy bármely ezen átmenő egyenes mindkét zárt félsíkjába a pontok legalább $\frac{n}{3}$ -ad része esik.

13. Határozzuk meg azokat a sokszögeket, amelyekbe egy háromszög átdarabolható csak eltolások segítségével.

14. Mutassunk két nem egybevágó trapézt, amik átdarabolhatók egymásba csak eltolások segítségével.

15. Határozzuk meg az következő halmazok Hausdorff távolságát

$$N = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$$

16. Határozzuk meg az következő halmazok Hausdorff távolságát

$$N = \text{conv}\{(0, 1), (0, -1)\}$$

$$M = \text{conv}\{(1, 0), (-1, 0)\}$$

17. Adott a térben egy háromszög. Határozzuk meg azt a pontot, amire a háromszög és a pont Hausdorff távolsága minimális.

18. Határozzuk meg a Hausdorff távolságát az

$A = 4$ egységnyi élű kocka,

$B =$ a kocka középpontja körüli 3 sugarú gömb

halmazoknak.

19. Határozzuk meg a térben az egységgömbhöz legközelebbi kockát.

20. Határozzuk meg az alábbi konvex halmazok térfogatát, felszínét

(a) két egyenlő sugarú, α szöget bezáró forgáshenger közös része,

(b) három egyenlő sugarú, páronként merőleges forgáshenger közös része.

21. Igazoljuk, hogy minden poliédernek van legfeljebb ötoldalú lapja.

22. Minden poliédernek van vagy háromszöglapja vagy van harmadfokú csúcsa.

23. Ha egy poliédernek nincs se háromszög se négyszög lapja, akkor van legalább 12 ötszöglapja és legalább 20 harmadfokú csúcsa.

24. Igaz-e, hogy minden poliéder élgráfjában van Hamilton kör?