3. Feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy a $[0,1]$ intervallum nem homeomorf a $[0,1] \times [0,1]$ négyzettel.

2. Topologikus tér összefüggő komponensének nevezzük a tartalmazásra nézve maximális összefüggő részhalmazát. Igazoljuk, hogy a komponensek

(a) zárt halmazok,
(b) páronként diszjunktak,
(c) az uniójuk az egész tér.

***

Jelölje $C(X)$ az X kompakt topologikus téren értelmezett folytonos valós függvények metrikus terét. $C(X)$ a függvények összeadására és szorzására kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot. Érvényes a *Stone-Weierstrass approximációs tétel* pl. a következő formában:

Tétel. *Legyen $H \subseteq C(X)$ részgyűrű, mely tartalmazza a konstans függvényeket, valamint szétválasztja X pontjait (bármely $x, y \in X$ pontokhoz létezik $f \in H$, hogy $f(x) \neq f(y)$). Ekkor H mindenütt sűrű $C(X)$-ben.*

***

3. Bizonyítsuk be, hogy az X kompakt topologikus tér akkor és csak akkor metrizálható ha a $C(X)$ tér szeparábilis.

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $C(X)$ maximális valódi ideáljai éppen a

$$C_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

alakú részhalmazok,

(b) bármely $A \subseteq X$ esetén

$$x_0 \in \overline{A} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad C_{x_0} \supseteq \bigcap \{C_x : x \in A\},$$

(c) X és Y kompakt topologikus terek akkor és csak akkor homeomorfak ha a $C(X)$ és $C(Y)$ gyűrűk izomorfak.