TUDNIVALÓK

- **A CooSpace-en az előadás színterében található egy Minta-dolgozat a „Gyakorlótesztek”-nél, amit ezekből a mintafeladatokból állítottunk össze.** A gyakorlóteszt kitöltésének eredményét az oktatók nem látják. Ügyeljenek, hogy a válaszokat a megadott formában írják. Azokra a feladatokra, amihez „fájl feltöltés” kell, a gyakorlóteszt automatikusan maximális pontot ad. Ha a vizsgatesztben ilyen feladat szerepel majd, akkor a teljes feladatmegoldást kell beküldeni. Írja rá a nevét és Neptun-kódját is, fényképezze le, és töltse fel. A Minta-dolgozatban szereplő pontszámok csak tájékoztató jellegűek, még változhatnak.
- **Kérjük, ellenőrizzék, hogy a Minta-dolgozatot ki tudják-e tölteni a CooSpace-en.** Ha nem, a helyi böngésző (konfiguráció) karbantartottsága vagy éppen túlzott védelmi beállításai jelenthetnek gondot. Kérjük, hogy a problémát tapasztaló hallgatók készítsenek képernyőképet a problémáról, jelöljék meg pontosan a kurzust és gyakorlótesztet (legjobb, ha a böngésző címsorát másolják le ehhez), jegyezzék fel, hogy milyen operációs rendszer alatt milyen böngészőt használtak, majd ezeket az információkat küldjék meg a fejlesztői supportra a CooSpace legfelső ikonsorában lévő fogaskerék melletti boríték ikon „hibabejelentés” pontjával. **Tabletről, telefonról a kitöltés ellenjavallt.**
- A dolgozatot megírásánál önálló munkát várunk.
- A feladatok megoldására 120 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixokat, majd a kapott mátrix elemeinek összegét adja meg.

(a) A^2; (b) $A^T B$; (c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$, az összeg: 26;

(b) $A^T B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$, az összeg: -26;

(c) $(A - A^T)B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ az összeg: 8.

2. Feladat.

(a) Nullázza ki a *-gal megjelölt elem oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsban:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1^* & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(b) Írja fel az alábbi determináns kifejtését a 2. sora szerint, és határozza meg a determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(c) Határozza meg az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & -7 & 8 \\ -5 & 7 & 0 & 8 & -12 \\ -6 & 9 & 0 & 1 & -5 \\ 9 & -7 & 0 & -7 & 7 \\ 2 & -3 & 1^* & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6.$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -25,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -160.$

3. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0. (x pont)

MEGOLDÁS. Az a paraméter értéke 0 vagy $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával. Ha megoldható, adja meg a kötött és a szabad ismeretlenek számát, és az általános megoldást.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}\right. .$$

(x pont)

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldható: két kötött és két szabad változó lesz. Egy lehetséges általános megoldás: $x_3 = 4x_1 - x_2,\ x_4 = 2 - 11x_1 + 6x_2\ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$.

5. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!) (x pont)

MEGOLDÁS. Ha $a^2 - 5a \neq 0$, azaz $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, akkor pontosan egy megoldás van.
Ha $a = 0$, végtelen sok megoldás van.
Ha $a = 5$, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

6. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

MEGOLDÁS. $X = \begin{pmatrix} -4 - 3x_{3,1} + 7x_{4,1} & 14 - 3x_{3,2} + 7x_{4,2} \\ 3 + 2x_{3,1} - 5x_{4,1} & -7 + 2x_{3,2} - 5x_{4,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$, ahol $x_{3,1}, x_{4,1}, x_{3,2}, x_{4,2} \in \mathbb{R}$.

7. Feladat. Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(a) Működőképes-e a gazdaság?

(b) Adjuk meg a $(3,2)^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.

(c) Adjuk meg a $(2,3)$ árvektor esetén a profitvektort. (A választ (x,y) alakban adja meg.)

(x pont)

MEGOLDÁS. Az A mátrix Leontief-inverze: $(E_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) A gazdaság működőképes, mivel az A mátrix Leontief-inverzének nincs negatív eleme.
(b) A bruttó kibocsátás: $(E_2 - A)^{-1} \cdot (3,2)^T = (10,16)^T$.
(c)$(-2,2)$

8. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(-1,4,4,9),(3,-8,-8,-18),(2,-8,-12,-27),(3,-12,-12,-30)$$

vektorrendszerének rangját. (A válaszban egy számot kell megadni.) (x pont)

MEGOLDÁS. 4

9. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(2,-3,-2,3),(1,-2,-1,0),(-1,2,1,-2),(0,1,0,-3)$$

vektorrendszerének rangját, és döntse el, hogy lineárisan független-e, generátorrendszer-e, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. (x pont)

MEGOLDÁS. A vektorrendszer rangja 3, lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

10. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V = \mathbb{R}^4$ vektortér

$$(1,-1,2,3),(2,-1,3,7),(1,-1,a^2+a,4),(1,-1,2,a^2+2)$$

vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e. (x pont)

MEGOLDÁS. A vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független / generátorrendszer / bázis, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}$.

11. Feladat. Adja meg a $v = (5,2,9)$ vektor koordinátasorát az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1,-2,1),(3,0,-1),(3,3,3)$ bázisában. (x pont)

MEGOLDÁS. $v = 2 \cdot (1,-2,1) - (3,0,-1) + 2 \cdot (3,3,3)$, így v koordinátasora $(2,1,2)$.

12. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrix rangját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

(A válaszban egy számot kell megadni.) (x pont)

MEGOLDÁS. 1.

13. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrix rangját, valamint adjon meg benne egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

MEGOLDÁS. $r(B) = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

14. Feladat. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a^2+a & 2 \\ 3 & 7 & 4 & a^2+2 \end{pmatrix}$ mátrix rangját az a valós paraméter függvényében. (x pont)

MEGOLDÁS. Az A mátrix rangja 3, ha $a \in \{-2, -1, 1\}$; minden más esetben 4 a rang.

15. Feladat. Adjon meg fundamentális megoldásrendszert az

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében. (x pont)

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$U = \{(-1/2x_4 - 10/3x_5, -x_4 - 1/3x_5, -1/2x_4 + 5/3x_5, x_4, x_5) : x_4, x_5 \in \mathbb{R}\},$$

egy fundamentális megoldásrendszere:

$$(-1/2, -1, -1/2, 1, 0), (-10/3, -1/3, 5/3, 0, 1).$$

16. Feladat.

(a) Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. (A választ x, y formában adja meg.)

(b) Adjon meg bázist a $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. (b) Az 1 sajátértékhez tartozó altér 2-dimenziós, amelynek az $(1, 0, 1)$, $(-2, 1, 0)$ vektorrendszer egy bázisa.

17. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$ valós kvadratikus alakot, és adja meg az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.). (x pont)

MEGOLDÁS. pozitív szemidefinit: $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3 = (x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2$, kanonikus alak: y_1^2;

18. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás. Rossz válasz esetén 50%-os pontlevonás jár (pl. 2 pont helyett -1 pont), ha nincs válasz, 0 pont.

I H

◯ ◯ Tetszőleges A és B mátrixok esetén, ha $A + B$ létezik, akkor BA^T is. (Igaz)

◯ ◯ Ha egy lineáris egyenletrendszer három egyenletet és 2019 ismeretlent tartalmaz, akkor végtelen sok megoldása van. (Hamis)

◯ ◯ Ha egy invertálható mátrix minden eleme racionális szám, akkor inverzének minden eleme is racionális szám.(Igaz)

◯ ◯ Ha $U = \{v\}$ altere a V valós vektortérnek, akkor U dimenziója 1. (Hamis)

◯ ◯ Ha a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 2, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független. (Hamis)

◯ ◯ Egy (3×3)-as valós mátrixnak legfeljebb 3 különböző sajátértéke van. (Igaz)

(x pont)

19. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes.

(a) Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ és ...

◯ $m = k$, akkor $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.
◯ $n = m = k = l$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$.
◯ $n = m$, $k = l$, akkor $A + B$ létezik.
◯ $n = m$, $k = l$, akkor A^3 és B^3 is létezik.

A 4. válasz a helyes

(b) Ha egy determináns egyik sorának az elemeit rendre egy másik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsokkal szorzunk meg, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor...

◯ 0-t kapunk.
◯ 1-et kapunk.
◯ elégtelent kapunk.
◯ bármilyen valós számot megkaphatunk.

Az 1. válasz a helyes

(c) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg Cramer-szabállyal, ha...

◯ megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

A 2. válasz a helyes

(d) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszert,...

◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.
◯ ha a vektorrendszer rangja $r = k$, akkor a vektorrendszer bázis.
◯ ha a vektorrendszer rangja r, akkor $r \leqslant n$.
◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer generátorrendszer.

Az 3. válasz a helyes

(e) Legyen V valós vektortér, $u, v, w \in V$. Az u, v, w vektorrendszer rangja nem egyenlő az u, v, w, z vektorrendszer rangjával, ha ...

◯ $z = u + v$.
◯ $z = \underline{0}$.
◯ $z \notin [u, v, w]$.
◯ $z = 3w$.

Az 3. válasz a helyes

(f) Legyen A $(n \times n)$-es valós mátrix.

◯ Ha $\lambda = 0$ sajátértéke A-nak, akkor $|A| = 0$.
◯ Ha λ sajátértéke A-nak, akkor $-\lambda$ is.
◯ Ha A-nak két sajátértéke van, akkor egy kétdimenziós sajátaltere van.
◯ Ha A-nak v sajátvektora, akkor $-v$ nem sajátvektora.

Az 1. válasz a helyes

(x pont)