TUDNIVALÓK

- **A CooSpace-en az előadás szînterében található egy Minta-dolgozat a „Gyakorlótesztek”-nél, amit ezekből a mintafeladatokból állítottunk össze.** A gyakorlóteszt kitöltésének eredményét az oktatók nem látják. Ügyeljenek, hogy a válaszokat a megadott formában írják. Azokra a feladatokra, amihez „fájl feltöltés” kell, a gyakorlóteszt automatikusan maximális pontot ad. Ha a vizsgatesztben ilyen feladat szerepel majd, akkor a teljes feladatmegoldást kell beküldeni. Írja rá a nevét és Neptun-kódját is, fényképezze le, és töltse fel. A Minta-dolgozatban szereplő pontszámok csak tájékoztató jellegűek, még változhatnak.
- **Kérjük, ellenőrizzék, hogy a Minta-dolgozatot ki tudják-e tölteni a CooSpace-en.** Ha nem, a helyi böngésző (konfiguráció) karbantartottsága vagy éppen túlzott védelmi beállításai jelenthetnek gondot. Kérjük, hogy a problémát tapasztaló hallgatók készítsenek képernyőképet a problémáról, jelöljék meg pontosan a kurzust és gyakorlótesztet (legjobb, ha a böngésző címsorát másolják le ehhez), jegyezzék fel, hogy milyen operációs rendszer alatt milyen böngészőt használtak, majd ezeket az információkat küldjék meg a fejlesztői supportra a CooSpace legfelső ikonsorában lévő fogaskerék melletti boríték ikon „hibabejelentés” pontjával. **Tabletről, telefonról a kitöltés ellenjavallt.**
- A dolgozatot megírásánál önálló munkát várunk.
- A feladatok megoldására 120 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixokat, majd a kapott mátrix elemeinek összegét adja meg.

(a) A^2; (b) $A^T B$; (c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

2. Feladat.

(a) Nullázza ki a *-gal megjelölt elem oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsban:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1^* & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(b) Írja fel az alábbi determináns kifejtését a 2. sora szerint, és határozza meg a determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(c) Határozza meg az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(x pont)

3. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0. $(x\ \mathrm{pont})$

4. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával. Ha megoldható, adja meg a kötött és a szabad ismeretlenek számát, és az általános megoldást.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

$(x\ \mathrm{pont})$

5. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}.$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!) $(x\ \mathrm{pont})$

6. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$(x\ \mathrm{pont})$

7. Feladat. Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(a) Működőképes-e a gazdaság?

(b) Adjuk meg a $(3, 2)^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.

(c) Adjuk meg a $(2, 3)$ árvektor esetén a profitvektort. (A választ (x, y) alakban adja meg.)

$(x\ \mathrm{pont})$

8. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(-1, 4, 4, 9), (3, -8, -8, -18), (2, -8, -12, -27), (3, -12, -12, -30)$$

vektorrendszerének rangját. (A válaszban egy számot kell megadni.) $(x\ \mathrm{pont})$

9. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(2, -3, -2, 3), (1, -2, -1, 0), (-1, 2, 1, -2), (0, 1, 0, -3)$$

vektorrendszerének rangját, és döntse el, hogy lineárisan független-e, generátorrendszer-e, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. $(x\ \mathrm{pont})$

10. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V = \mathbb{R}^4$ vektortér

$$(1, -1, 2, 3), (2, -1, 3, 7), (1, -1, a^2 + a, 4), (1, -1, 2, a^2 + 2)$$

vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e. $(x\ \mathrm{pont})$

11. Feladat. Adja meg a $v = (5, 2, 9)$ vektor koordinátasorát az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1, -2, 1), (3, 0, -1), (3, 3, 3)$ bázisában. $(x\ \mathrm{pont})$

12. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrix rangját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

(A válaszban egy számot kell megadni.) (x pont)

13. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrix rangját, valamint adjon meg benne egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

14. Feladat. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a^2+a & 2 \\ 3 & 7 & 4 & a^2+2 \end{pmatrix}$ mátrix rangját az a valós paraméter függvényében. (x pont)

15. Feladat. Adjon meg fundamentális megoldásrendszert az

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében. (x pont)

16. Feladat.

(a) Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. (A választ x, y formában adja meg.)

(b) Adjon meg bázist a $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(x pont)

17. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$ valós kvadratikus alakot, és adja meg az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.). (x pont)

18. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás. Rossz válasz esetén 50%-os pontlevonás jár (pl. 2 pont helyett -1 pont), ha nincs válasz, 0 pont.

I H

○ ○ Tetszőleges A és B mátrixok esetén, ha $A + B$ létezik, akkor BA^T is.

○ ○ Ha egy lineáris egyenletrendszer három egyenletet és 2019 ismeretlent tartalmaz, akkor végtelen sok megoldása van.

○ ○ Ha egy invertálható mátrix minden eleme racionális szám, akkor inverzének minden eleme is racionális szám.

○ ○ Ha $U = \{v\}$ altere a V valós vektortérnek, akkor U dimenziója 1.

○ ○ Ha a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 2, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független.

○ ○ Egy (3×3)-as valós mátrixnak legfeljebb 3 különböző sajátértéke van.

(x pont)

19. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes.

(a) Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ és ...

○ $m = k$, akkor $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.
○ $n = m = k = l$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$.
○ $n = m$, $k = l$, akkor $A + B$ létezik.
○ $n = m$, $k = l$, akkor A^3 és B^3 is létezik.

(b) Ha egy determináns egyik sorának az elemeit rendre egy másik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsokkal szorzunk meg, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor...

○ 0-t kapunk.
○ 1-et kapunk.
○ elégtelent kapunk.
○ bármilyen valós számot megkaphatunk.

(c) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg Cramer-szabállyal, ha...

◯ megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

(d) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszert,...

◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.
◯ ha a vektorrendszer rangja $r = k$, akkor a vektorrendszer bázis.
◯ ha a vektorrendszer rangja r, akkor $r \leqslant n$.
◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer generátorrendszer.

(e) Legyen V valós vektortér, $u, v, w \in V$. Az u, v, w vektorrendszer rangja nem egyenlő az u, v, w, z vektorrendszer rangjával, ha ...

◯ $z = u + v$. ◯ $z = \underline{0}$.
◯ $z \notin [u, v, w]$. ◯ $z = 3w$.

(f) Legyen A $(n \times n)$-es valós mátrix.

◯ Ha $\lambda = 0$ sajátértéke A-nak, akkor $|A| = 0$.
◯ Ha λ sajátértéke A-nak, akkor $-\lambda$ is.
◯ Ha A-nak két sajátértéke van, akkor egy kétdimenziós sajátaltere van.
◯ Ha A-nak v sajátvektora, akkor $-v$ nem sajátvektora.

(x pont)