

8. Előadás

Ismétlés

Definíció (Lineárisan függő vektorrendszer).

A V valós vektortérbeli v_1, \dots, v_n vektorrendszer **lineárisan függő**, ha van olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely a zérusvektorral egyenlő, azaz vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák, de $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \mathbf{0}$.

Definíció (Lineárisan független vektorrendszer).

A v_1, \dots, v_n vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem lineárisan függő, azaz ha a v_1, \dots, v_n vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\mathbf{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Tétel (Lin. független vektorr. részrendszerei).

Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere is az.

Indoklás: Ha az összes vektorból nem lehet előállítani a $\mathbf{0}$ vektort a triviálistól különböző módon, akkor kevesebb vektorból sem.

Következmény.

Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a teljes vektorrendszer is az.

Példa.

Egy lineárisan függő vektorrendszer részrendszerei között már lehetnek lineárisan függetlenek, például a $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 1, 2)$ vektorrendszer lineárisan függő, azonban az $(1, 1, 1)$ részrendszere lineárisan független, sőt az $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ vektorrendszer is.

Definíció (Maximális lineárisan független részrendszer).

Vektorrendszer **maximális lineárisan független részrendszerének** nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer továbbra is lineárisan független maradjon.

Az előbbi példában az $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszer, de nem az egyetlen, mivel $(2, 2, 2), (1, 1, 2)$ is az.

Definíció (Vektorrendszer rangja).

Vektorrendszer **rangjának** nevezzük a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r , ha kiválasztható r darab lineárisan független vektor közülük, de $(r + 1)$ darab már nem.

Példa.

- A $(0, 0, 0)$ vektorrendszer rangja 0.
- Az $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ vektorrendszer rangja 1.
- Az $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (2, -2, 2)$ vektorrendszer rangja 2. Maximális lineárisan független részrendszerei: $(1, 1, 1), (1, -1, 1)$ és $(1, 1, 1), (2, -2, 2)$.
- Az $(1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2)$ vektorrendszer rangja 3, mivel a vektorrendszer lineárisan független.

Tétel.

Legyen V valós vektortér.

- A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer rangja legfeljebb n , és pontosan akkor n , ha a vektorrendszer lineárisan független.
- Ha egy vektorrendszer rangja r , akkor r darab lineárisan független vektort kiválasztva belőle, a vektorrendszer minden tagja előáll ezek lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik, ha bővítjük egy olyan vektorral, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.

Tétel.

Legyen V valós vektortér.

- Vektorrendszer rangja nem változik, ha elhagyunk belőle egy olyan vektort, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik meg, ha valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának többszörösét, vagy ha valamely vektorát 0-tól különböző valós számmal szorozzuk meg.

Tétel.

Legyen V valós vektortér, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n \in V$. Ha a v_1, \dots, v_n vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előáll az u_1, \dots, u_k vektorok mindegyike, akkor az u_1, \dots, u_k vektorrendszer rangja kisebb vagy egyenlő, mint a v_1, \dots, v_n vektorrendszer rangja.

Tétel (Rangszámítás Gauss-eliminációval).

Az \mathbb{R}^n -beli vektorrendszer rangját meghatározhatjuk Gauss-eliminációval:

- A vektorrendszer vektorait beírjuk egy mátrix soraiba vagy oszlopaiba.
- Gauss-eliminációt hajtunk végre a mátrixon.
- A lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

Megjegyzés

Ha a Gauss-elimináció elvégzése után nemcsak a vektorrendszer rangjára vagyunk kíváncsiak, hanem egy maximális lineárisan független részrendszert is szeretnénk megadni, akkor a mátrix **soraiba** kell beírnunk a vektorokat. Továbbá a Gauss-elimináció elvégzése után figyelniük kell, hogy a lépcsős alak nem nulla sorainak melyik eredeti vektor felel meg, mert a sorcsere esetén változhat a sorrend.

Példa.

Számítsuk ki az $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 2)$, $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, 2, 3, 3)$, $(0, -1, 0, 0)$ vektorrendszer rangját.

- A vektorok alkotják a mátrix sorait:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Az $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 2)$, $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, 2, 3, 3)$, $(0, -1, 0, 0)$ vektorrendszer rangja 3.
- A megoldás során sorcserét is hajtottunk végre, az első három vektor nem alkot maximális lineárisan független részrendszert. Egy maximális lineárisan független részrendszere például:

$$(1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, 1, 1, 1).$$

Tétel (Rangszámítás EBT-vel).

- A vektorokat beírjuk egy EBT-táblázat **oszlopaiba**, majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre, ameddig tudunk.
- A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A sorokba bevitt oszlopcímkek adják az eredeti vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszerét, a számuk pedig a rangot.

Példa.

Számítsuk ki a $v_1 = (1, -1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1)$,
 $v_3 = (1, 2, 1, -1, -1)$, $v_4 = (1, 2, 4, 0, 2)$, $v_5 = (3, 0, 2, 0, 0)$ vektorrendszer rangját, és adjunk meg benne maximális lineárisan független részrendszert.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1^*	-1	1	1	3
e_2	-1	1	2	2	0
e_3	2	1	1	4	2
e_4	1	0	-1	0	0
e_5	2	1	-1	2	0

1.	v_2	v_3	v_4	v_5
e_2	0	3	3	3
e_3	3	-1	2	-4
e_4	1^*	-2	-1	-3
e_5	3	-3	0	-6

2.	v_3	v_4	v_5
e_2	3^*	3	3
e_3	5	5	5
e_5	3	3	3

3.	v_4	v_5
e_3	0	0
e_5	0	0

A vektorrendszer rangja 3, egy maximális lineárisan független részrendszere:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 1, -1, -1).$$

Definíció (Bázis).

Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

Példa.

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis*** \mathbb{R}^n -ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- Az $(1, \sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{3}, 1, 1)$, $(-1, 1, \sqrt{5})$ vektorrendszer \mathbb{R}^3 -ban.

* Az első 10 hallgató, aki "standard bázis" tárggyal e-mailt küld az előadónak, kap 1 plusz pontot. (Megvan a 10 hallgató!)

Definíció (Véges dimenziós vektortér).

A V vektorteret **véges dimenziós**nak nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

Az \mathbb{R}^n vektortér véges dimenziós, mivel az e_1, \dots, e_n standard bázis generátorrendszere.

Tétel.

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Definíció (Dimenzió).

A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján** bázisának közös elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.)

Példa.

Az \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) vektortér n -dimenziós, az e_1, \dots, e_n standard bázis bázisa e vektortérnek:

$$e_\ell = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (1 \leq \ell \leq n).$$

Jelölés

A V valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli, pl.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$,
 $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Tétel (Dimenzió és rang).

A $[v_1, \dots, v_n]$ altér dimenziója megegyezik a v_1, \dots, v_n vektorrendszer rangjával. A v_1, \dots, v_n vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei bázisai ezen altérnek.

Tétel (Lin. független vektorrendszerek és bázisok).

Ha a V vektortér dimenziója n , akkor

- bármely n -elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V -nek;
- bármely n -elemű generátorrendszere bázisa V -nek.

Bázis megadása generált altérben

Legyen $U = [v_1, \dots, v_k]$ altér a V véges dimenziós valós vt.

- 1 EBT-vel meghatározzuk, hogy (maximálisan) hány darab vektor vonható be a bázisba a v_1, \dots, v_k vektorok közül.
- 2 Bázisba bevont vektorok bázist alkotnak az U altérben, számuk az altér dimenziójával egyezik meg.

VAGY

- 1 A generátorrendszer vektorait beírjuk az A mátrix soraiba.
- 2 A sorokon végzett elemi átalakításokkal (!!!) meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
- 3 A nem csupa 0-t tartalmazó sorvektorok az U altér egy bázisát adják.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)$,
 $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)$,
 $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)$. Határozzuk meg U dimenzióját.

0.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	1.	u_1	u_3	u_4	u_5
e_1	-5	1*	1	-1	1	e_2	17	6	3	-1*
e_2	7	2	8	1	1	e_3	21	12	3	-3
e_3	16	1	13	2	-2	e_4	17	6	3	-1
e_4	7	2	8	1	1	e_5	-4	-6	0	2
e_5	1	-1	-7	1	1					

$$\begin{array}{c|ccc}
 2. & u_1 & u_3 & u_4 \\
 \hline
 e_3 & -30 & -6 & -6 \\
 e_4 & 0 & 0 & 0 \\
 e_5 & 30 & 6 & 6^*
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc}
 3. & u_1 & u_3 \\
 \hline
 e_3 & 0 & 0 \\
 e_4 & 0 & 0
 \end{array}$$

Az u_1, \dots, u_5 vektorrendszer rangja 3, az u_2, u_4, u_5 vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)$,
 $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)$,
 $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)$. Határozzuk meg U dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 16 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 13 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az u_1, \dots, u_5 vektorrendszer rangja 3, az
 $(1, 0, 0, 0, -2)$, $(0, 1, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 0, -1) \in U$ vektorok lineárisan
függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Tétel (Lin. függetlenség, generátorr., bázis, rang).

Legyen V n -dimenziós vektortér és $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorrendszer, melynek rangja r . Ekkor a következők érvényesek:

- 1 $r \leq n, k$;
- 2 a vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $r = k$;
- 3 a vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere V -nek, ha $r = n$;
- 4 a vektorrendszer pontosan akkor bázisa V -nek, ha $r = k = n$.

Példa.

Döntsük el, hogy az $(\mathbb{R}^4\text{-beli})$

$$(1, -1, 2, 1), (-3, 1, 0, 2), (1, 1, -1, 2), (-1, 1, 1, 5)$$

vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e $\mathbb{R}^4\text{-ben}$.

Az \mathbb{R}^4 vektortér dimenziója 4 ($n = 4$), a vektorrendszernek 4 eleme van ($k = 4$). Ki kellene számolni még a vektorrendszer rangját ($r = 3$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja $r = 3$. A vektorrendszer nem lin. fgt., nem generátorr. és nem bázis.

Tétel.

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V vektortérben, amelyekre $U_1 \subseteq U_2$ teljesül.
Ekkor

- $\dim(U_1) \leq \dim(U_2)$;
- $U_1 = U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\dim(U_1) = \dim(U_2)$.

Tétel (Alterek dimenziótétele).

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V valós vektortérben. Ekkor

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Tétel (Alterek összegének generátorrendszere).

Ha $U_1 = [u_1, \dots, u_m]$ és $U_2 = [v_1, \dots, v_n]$ alterek a V vektortérben, akkor

$$U_1 + U_2 = [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n].$$

Kahoot

Az előadáson a <https://kahoot.com/> oldalon lehetett online tesztek megoldani.

A következő feladatok szerepeltek.

Igaz vagy Hamis?

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer rangja 1, de az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja 3.

Igaz vagy Hamis?

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer rangja 1, de az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja 3.

Hamis,

Igaz vagy Hamis?

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer rangja 1, de az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja 3.

Hamis, az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja is 1.

Igaz vagy Hamis?

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer rangja 1, de az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja 3.

Hamis, az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja is 1.

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer bázis \mathbb{R}^2 -ben.

Igaz vagy Hamis?

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer rangja 1, de az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja 3.

Hamis, az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ vektorrendszer rangja is 1.

- Az $(1, 1)$, $(2, 2)$ vektorrendszer bázis \mathbb{R}^2 -ben.

Hamis, a rangja 1.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

- (a) Bármely vektorrendszer rangja egyenlő a vektorok számával.
- (b) A vektorok által generált altér dimenziója egyenlő a vektorrendszer rangjával.
- (c) A zérusvektor minden bázisnak eleme.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

- (a) Bármely vektorrendszer rangja egyenlő a vektorok számával.
- (b) A vektorok által generált altér dimenziója egyenlő a vektorrendszer rangjával.
- (c) A zérusvektor minden bázisnak eleme.

A (b) állítás az igaz.