4. Előadás

Elemi átalakítások (ismétlés)

Definíció (Mátrixok elemi átalakításai (ismétlés)).

Mátrixok elemi átalakításai a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

Lépcsős alakú mátrixok (ismétlés)

Definíció (Lépcsős alakú mátrixok).

Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor lépcsős alakú. Tegyük fel, hogy a nem a zérusmátrix. Ekkor A lépcsős alakú, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

Gauss-elimináció (ismétlés)

Tétel.

Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz". Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Mátrixok lépcsős alakja nem egyértelmű.

Lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

- a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk (pl. Gauss-eliminációval),
- a lépcsős alak ismeretében eldöntjük, hogy van-e megoldás (ld. következő tétel),
- ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakból.

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora ellentmondó, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tétel (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

Ha a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja nem tartalmaz ellentmondó sort, akkor van megoldása az egyenletrendszernek. Ha a bővített mátrix vezéregyesei rendre a $j_1 < \cdots < j_r$ oszlopokban vannak, akkor az $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ ismeretlenek lesznek kötöttek, a többi ismeretlen pedig szabad. Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{1(j_1+1)} & \cdots & & \ldots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \ldots & & & 0 & 1 & a'_{r(j_r+1)} & \ldots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \ldots & & & & & & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array}\right),$$

akkor ...

Tétel (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

... Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{1(j_1+1)} & \dots & & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array}\right),$$

akkor

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= b'_1 - a'_{1(j_1+1)} x_{j_1+1} - \dots - a'_{1m} x_m, \\ &\vdots \\ x_{j_r} &= b'_1 - a'_{r(j_1+1)} x_{j_1+1} - \dots - a'_{rm} x_m. \end{aligned}$$

Ne felejtsük el, hogy a vezéregyesek felett 0-ák állnak!

Példa.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol λ valós paraméter.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array}\right).$$

- Ha $\lambda \neq 5$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, mivel van ellentmondó sor.

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Ha $\lambda = 5$, akkor van megoldás. Két kötött (x_1, x_2) és két szabad (x_3, x_4) ismeretlen van. Az általános megoldás:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \qquad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

valós számnégyesként pedig: $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4\right)$, ahol x_3 és x_4 tetszőleges valós számok.

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & 5. \end{array}\right.$$

Az egyenletrendszer egy általános megoldása:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4\right) \qquad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldását úgy kapjuk meg, hogy a szabad változóknak (konkrét) értéket adunk. Legyen $x_3 = 9$ és $x_4 = 25$, ekkor $x_1 = -31$ és $x_2 = -29$, a konkrét megoldás:

$$(-31, -29, 9, 25).$$

A megoldások száma

Tétel.

Az

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása, ha bővített mátrixának lécsős alakjában van ellentmondó sor,
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad változója,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad változója.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó (x_2).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

Elemi Bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x_2 & - & & & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & & & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & -2. \end{array}\right.$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_2-t: $x_2 = x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ {\color{red}x_1} & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

Fejezzük ki a harmadik egyenletből x_1-et: $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_3 & - & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 4, \\ 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_3-at: $x_3 = 2 - \frac{3}{2}x_4 + 2x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\left\{\begin{array}{rcr} -\frac{1}{2}x_4 & = & -6. \end{array}\right.$$

Az egyenletrendszer meg is oldódott:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 12,\\
x_3 &= 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 = 20 + 2x_5,\\
x_1 &= -2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 + 3x_5,\\
x_2 &= x_4 + x_5 = 12 + x_5,
\end{aligned}
$$

ahol x_5 tetszőleges valós szám.

A végrehajtott eljárás több előnnyel is bír:

- meglehetősen természetes módja az egyenletrendszer megoldásának,
- tömör és jól áttekinthető formában is végrehajtható.

Az eljárás neve: Elemi Bázistranszformáció, amelynek során az új egyenletrendszer együtthatóit fogjuk ügyesen számolni.

Foglaljuk táblázatba az

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

egyenletrendszer együtthatóit:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & \dots & x_m & \mathbf{b} \\ \hline e_1 & a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \\ \hline \end{array}$$

0.	x_1	$\dots$	x_m	$\mathbf{b}$
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nm}	b_n

Az alábbi lépéseket hajtsuk végre:

- a generáló elem választása: az együtthatók együtthatók közül választunk egy 0-tól különbözőt (pl.: a_{ij}-t, ami annak felel meg, hogy az i-edik egyenletből fejezzük ki x_j-t), a generáló elemet $*$-gal megjelöljük (a_{ij}^*),
- az x_j-hez tartozó oszlopot töröljük és a következő átalakításokat hajtjuk végre:
  - e_i helyébe x_j kerül,
  - az i-edik sor minden elemét osztjuk a_{ij}-vel,
  - az új táblázat többi elemét pedig a Téglalap-szabállyal számítjuk ki (**b** oszlopában is).

Téglalap-szabály

A téglalap-szabály segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem a generáló elemmel együtt egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	b	.	d	.
e_2	.	.	.	.
e_3	a^*	.	c	.

Ebben az esetben az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

Elemi bázistranszformáció: $a_{ij}^* \neq 0$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
k. & \dots & x_v & \dots & x_j & \dots & \mathbf{b} \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_u & \dots & {\color{blue}a_{uv}} & \dots & a_{uj} & \dots & {\color{green}b_u} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_i & \dots & {\color{red}a_{iv}} & \dots & a_{ij}^* & \dots & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$
{\color{red}a'_{iv}} = a_{iv}/a_{ij}^*, \qquad {\color{green}b'_i} = b_i/a_{ij}^*
$$

$$
{\color{blue}a'_{uv}} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*} = \frac{a_{uv}a_{ij}^* - a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*}, \qquad \text{ha } u \neq i,
$$

$$
{\color{green}b'_u} = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a_{ij}^*} = \frac{b_u a_{ij}^* - a_{uj}b_i}{a_{ij}^*}, \qquad \text{ha } u \neq i.
$$

Az új táblázat:

$(k+1).$	$\dots$	x_v	$\dots$	x_{j-1}	x_{j+1}	$\dots$	$\mathbf{b}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_u	$\dots$	a'_{uv}	$\dots$	$a'_{u(j-1)}$	$a'_{u(j+1)}$	$\dots$	b'_u
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_j	$\dots$	a'_{iv}	$\dots$	$a'_{i(j-1)}$	$a'_{i(j+1)}$	$\dots$	b'_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

$$a'_{iv} = a_{iv}/a^*_{ij}, \qquad b'_i = b_i/a^*_{ij}$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}} = \frac{a_{uv}a^*_{ij} - a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i,$$

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a^*_{ij}} = \frac{b_u a^*_{ij} - a_{uj}b_i}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i.$$

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x_2 & - & & & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & & & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & -2. \end{array}\right.$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
e_1	0	1	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \quad \color{red}{x_2} - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
e_1	0	1^*	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

Példa.

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	0	−1	−1	0
e_2	2	0	−5	−6	0
e_3	0	3	−5	−6	0
e_4	1	−1	−1	−1	−2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

Példa.

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
x_2	0	0	-1	-1	0
e_2	2	0	-5	-6	0
e_3	0	3	-5	-6	0
e_4	1^*	-1	-1	-1	-2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ {\color{red}x_1} & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

Példa.

2.	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	−1	−1	0
e_2	2	−3	−4	4
e_3	3	−5	−6	0
x_1	−1	−1	−1	−2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa.

2.	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2^*	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa.

3.	x_4	x_5	**b**
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -1/2x_4 & = & -6, \end{array} \right.$$

Példa.

3.	x_4	x_5	**b**
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2^*$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\left\{ \; {\color{red}-1/2x_4} \quad = \quad -6, \right.$$

Példa.

4.	x_5	**b**
x_2	-1	12
x_3	-2	20
x_4	0	12
x_1	-3	30

$$x_1 = 30 + x_5, \quad x_2 = 12 + x_5, \quad x_3 = 20 + 2x_5, \quad x_4 = 12,$$

az x_5 ismeretlen értéke tetszőlegesen megválasztható. Figyeljünk az előjelváltásra!

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van ellentmondó sor, ami a következő alakú:

	x_{j_1}	$\dots$	x_{j_k}	$\mathbf{b}$
.	.	$\dots$	.	.
e_i	0	$\dots$	0	$c \neq 0$
.	.	$\dots$	.	.

Fontos: az ellentmondó sor elején e_i-nek kell szerepelnie!!!

Gauss-elimináció vs Elemi bázistranszformáció

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

A két módszer (GE és EBT) lényegében ugyanaz, de mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

Előny:

- Nincs vezéregyes!? Akkor csinálunk!

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

Előny:

- a generáló elem tetszőleges 0-tól különböző elem lehet, nem szükséges az első lépésben az első oszloppal dolgozni.
- lehetőségünk van a kötött változók „befolyásolására”.

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Gauss-eliminációval.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{(-2)\cdot[1.]+[2.]} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{(-23)\times[1.]+[2.],\ (-41)\times[1.]+[3.]} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array}\right)$$

$$\ldots$$

$$\overset{(-23)\times[1.]+[2.],\ (-41)\times[1.]+[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-2)\times[2.]+[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & 0 & -30 & -26 & -153 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]\cdot(-1/40),\ [3.]\cdot(1/30)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & -179/10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array}\right)$$

$$\overset{\dots}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -103/20 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array}\right)$$

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Elemi bázistranszformációval.

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
e_1	11*	13	17	19	17
e_2	23	29	31	37	3
e_3	41	43	47	53	8

1.	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	$13/11$	$17/11$	$19/11$	$17/11$
e_2	$20/11^*$	$-50/11$	$-30/11$	$-358/11$
e_3	$-60/11$	$-180/11$	$-196/11$	$-609/11$

2.	x_3	x_4	**b**
x_1	$9/2$	$7/2$	$227/10$
x_2	$-5/2$	$-3/2$	$-179/10$
e_3	-30	-26^*	-153

3.	x_3	**b**
x_1	$6/13$	$547/260$
x_2	$-10/13$	$-2359/260$
x_4	$15/13$	$153/26$

Kahoot

Az előadáson a https://kahoot.com/ oldalon lehetett online teszteket megoldani.

A következő feladatok szerepeltek.

Igaz vagy Hamis?

- Egy lépcsős alakú mátrix nem nulla sorai között lehetnek azonosak.

Hamis. Minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme.

- Az elemi bázistranszformáció bármelyik lineáris egyenletrendszerre alkalmazható.

Igaz.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris egyenletrendszer n változót tartalmaz és m egyenletből áll, és...

(a) $n > m$, akkor lehet pontosan egy megoldása.

(b) $n > m$, akkor előfordulhat, hogy nincs megoldás.

(c) $n = m$, akkor pontosan egy megoldása van.

(d) $n < m$, akkor végtelen sok megoldása van.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris egyenletrendszer n változót tartalmaz és m egyenletből áll, és...

(a) $n > m$, akkor lehet pontosan egy megoldása.

(b) $n > m$, akkor előfordulhat, hogy nincs megoldás.

(c) $n = m$, akkor pontosan egy megoldása van.

(d) $n < m$, akkor végtelen sok megoldása van.

A (b) állítás az igaz, például

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$