

# Lineáris algebra

(10A103)

Kátai-Urbán Kamilla

# Tudnivalók (I.)

- Honlap: <http://www.math.u-szeged.hu/~katai>
- Jegyzet:
  - Az előadáson készített jegyzet.
  - Megyesi László: Lineáris algebra.

# Tudnivalók (II.)

- **Vizsga:** írásban (100 perc), feltétele a Lineáris algebra gyakorlat sikeres teljesítése;
  - ♣ I/H kérdések (20 pont)
  - ◇ számolás feladatok (50 pont)
  - ♥ definíciók, tételkimondások (10 pont)
  - ♠ két paraméteres feladat (20 pont)
- Mintavizsga a félév közepe táján kerül fel a honlapra.
- Ponthatárok:
  - $[0, 48) \rightsquigarrow$  elégtelen (1)
  - $[48, 63) \rightsquigarrow$  elégséges (2)
  - $[63, 76) \rightsquigarrow$  közepes (3)
  - $[76, 87) \rightsquigarrow$  jó (4)
  - $[87, 100] \rightsquigarrow$  jeles (5)

## Tudnivalók (II.)

**A gyakorlat sikeres teljesítése esetén a gyakorlati jegy vizsgajegyként is elfogadható\*.**

A javító dolgozat után meghirdetünk egy vizsgaidőpontot, amire minden hallgatót jelentkeztetünk, akinek legalább elégséges (2) gyakorlati jegye van. Aki nem akarja elfogadni a gyakorlati jegyet vizsgajegyként, annak le kell jelentkeznie erről az időpontról. (Aki pót/javító dolgozatot ír, az is elfogadhatja megajánlott vizsgajegyként a gyakorlati jegyet.)

\* Ez a lehetőség csak a 2016/17-es tanévtől érvényes, aki korábban teljesítette a gyakorlatot, annak vizsgáznia kell.

## Tudnivalók (III.)

- **Gyakorlat:** 100 pontot lehet elérni, ponthatárok ugyanazok, mint a vizsgán.
- A 100 pont a következőképpen áll össze: 10 pont a két „kis” zárthelyi dolgozatból, 90 pont a két „nagy” zárthelyi dolgozatból.
- A „kis” zárthelyi dolgozatok NEM javíthatók és NEM pótolhatók. Az egyik „nagy” zárthelyi dolgozat javítható „xor” pótolható.
- A „nagy” zárthelyi dolgozatok időpontjai:
  - 1. „nagy” zárthelyi dolgozat: **2020. március 20.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet),
  - 2. „nagy” zárthelyi dolgozat: **2020. május 8.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet),
  - Pótlás/Javítás: **2020. május 15.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet).
- **Plusz 5 pont** szerezhető az előadáson. (<https://kahoot.com/>).

# 1. Előadás

# Mátrixok

- $(n \times m)$ -es mátrix: „táblázat”, melynek  $n$  sora és  $m$  oszlopa van.
- KEREK zárójelek között.
- Elemei  $\mathbb{R}$  elemei, azaz VALÓS számok.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0.5 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

- A *mátrixokat* általában nagybetűkkel jelöljük ( $A, B, C, \dots$ ). Az  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$  mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- **Mátrix elemei:** a  $B$  mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemére használhatjuk a  $b_{ij}$  jelölést, de ugyanezt az elemet  $(B)_{ij}$ -vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$$\mathbb{R}^{n \times m} \quad (n, m \in \mathbb{N}) \quad i \begin{pmatrix} & & j & & \\ & & \vdots & & \\ \dots & & b_{ij} & & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$



## Példa

Sütöde „termelési” mátrixa

	liszt (kg)	víz (l)	só (dkg)	energia (kWh)
kenyér (1 kg)	0.8	0.3	3.0	2.4
kifli (8 db)	0.6	0.2	2.0	2.0
zsemle (12 db)	0.8	0.3	2.0	1.9

Sütöde „árfolyam” mátrixa

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt (Ft/kg)	220	230	235
víz (Ft/l)	20	15	14
só (Ft/dkg)	5	4	6
energia (Ft/kWh)	40	41	35

Mennyibe került 1kg kenyér előállítása december 1-én?

	liszt (kg)	víz (l)	só (dkg)	energia (kWh)
kenyér	0.8	0.3	3.0	2.4
kifli	0.6	0.2	2.0	2.0
zsemle	0.8	0.3	2.0	1.9

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt	220	230	235
víz	20	15	14
só	5	4	6
energia	40	41	35

Egy kenyér előállítása december 1-én

$$0.8 \cdot 220 + 0.3 \cdot 20 + 3.0 \cdot 5 + 2.4 \cdot 40 = 293.0$$

Ft-ba került.

	liszt	víz	só	energia		dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
kenyér	$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\ 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\ 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9 \end{pmatrix}$				liszt	$\begin{pmatrix} 220 & 230 & 235 \\ 20 & 15 & 14 \\ 5 & 4 & 6 \\ 40 & 41 & 35 \end{pmatrix}$		
kifli					víz			
zsemle					só			
				energia				

Hasonlóképpen számíthatóak ki a következő táblázat elemei.

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
kenyér (1 kg)	$\begin{pmatrix} 293.0 & 298.9 & 294.2 \\ 226.0 & 231.0 & 225.8 \\ 268.0 & 274.4 & 270.7 \end{pmatrix}$		
kifli (8 db)			
zsömle (12 db)			

# Markov-láncok

## A költözés dinamikája

Egy nagyon kis (2 településből álló) ország populációdinamikáját modellezzük egyszerűen: megnézzük, hogy egy évben az  $A$  településből hányan költöznek  $B$ -be, és viszont (a lakosság minden más változásától most eltekintünk). Ha az oszlopokban azt ábrázoljuk, hogy a lakosság hányad része maradt a városban, illetve költözött el, akkor a következő mátrixot állíthatjuk össze:

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

- Ezen egyszerű modell szerint a két város összlakosság száma változatlan. Ez matematikailag is igazolható?
- Úgy tűnik, hogy hosszú távon  $A$  egyre gyarapodik,  $B$  pedig fogy, egészen addig, amíg egy egyensúlyi állapot beáll. Igaz-e ez minden esetben?
- Ha van egyensúlyi állapot, akkor vajon egyértelmű-e?
- Ha van egyensúlyi állapot, és egyértelmű, akkor meg tudjuk-e hatékony módon határozni?

A fenti kérdések megválaszolására többféle matematikai eszköz áll a rendelkezésünkre:

- mátrixműveletek, gyors hatványozás,
- vektorterek, alterek, dimenzió fogalma,
- mátrix sajátértéke, sajátaltere.

## A költözés dinamikája

Ha  $A$  lakosainak száma 10 000 és  $B$  lakosainak száma pedig 50 000, akkor mennyi lesz a lakosok száma egy év múlva az egyes városokban?

Világos, hogy  $A$  és  $B$  lakosainak száma

$$A : 0.8 \cdot 10\,000 + 0.3 \cdot 50\,000 = 23\,000,$$

$$B : 0.2 \cdot 10\,000 + 0.7 \cdot 50\,000 = 37\,000$$

lesz egy év múlva.

A fenti számolások nagyon hasonlítanak a sütődés példában szereplőkhöz. Mindkét példa mögött ugyanaz a matematikai jelenség, a

# mátrixszorzás

áll.

# Mátrixszorzás

## Definíció: mátrixok szorzása

Ha  $A$   $(n \times m)$ -es,  $B$  pedig  $(m \times k)$ -s mátrix, akkor létezik a szorzatuk,  $A \cdot B$ , amely  $(n \times k)$ -s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

## Definíció: a szorzata elemei

Ha létezik az  $A \cdot B$  szorzatmátrix, akkor az  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk  $A$   $i$ -edik sorának elemeit  $B$   $j$ -edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott számokat összeadjuk.



## Példa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$c_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4,$$

$$c_{12} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5,$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7,$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5.$$

## Mátrixszorzás

Ha  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$  és  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ , akkor  $AB$  és  $BA$  is

létezik.

Az  $AB$  mátrix 2-dik sorának 3-adik eleme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -33 & 94 \\ 40 & -101 & 286 \\ 156 & -429 & 1234 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 27 \cdot 9 = 286.$$

# Mátrixszorzás definíciója

Legyen  $A$  ( $n \times m$ )-es,  $B$  pedig ( $m \times k$ )-s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az  $A \cdot B$  mátrix ( $n \times k$ )-s,  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j} = \sum_{t=1}^m a_{it} \cdot b_{tj}.$$

## MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

### 1. példa

$A \cdot B$  létezik, de  $B \cdot A$  nem létezik.

$$(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad -1),$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -1) \text{ NEM LÉTEZIK.}$$

## MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

### 2. példa

$A \cdot B$  és  $B \cdot A$  is létezik, de különböző méretűek.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3).$$

## MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

### 3. példa

$A \cdot B$  és  $B \cdot A$  is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Összeadás

## Definíció: mátrixok összegének létezése

Ha az  $A$  és  $B$  mátrixok  $(n \times m)$ -es mátrixok, akkor összeadhatók. Az összegük is  $(n \times m)$ -es mátrix lesz, azaz csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

## Definíció: mátrixok összege

Az összegmátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme  $A$   $i$ -edik sora  $j$ -edik elemének és  $B$   $i$ -edik sora  $j$ -edik elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

## Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 + 2, & c_{12} &= (-2) + (-1), \\ c_{21} &= 3 + 0, & c_{22} &= 4 + 1, \\ c_{31} &= 2 + 2, & c_{32} &= 1 + 4. \end{aligned}$$



# Mátrix szorzása skalárral

Skalár = valós szám

Létezés

Mindig létezik.

Definíció: mátrix szorzása skalárral

Az  $A$  mátrixot úgy szorzuk a  $\lambda$  skalárral, hogy  $A$  minden elemét megszorozzuk  $\lambda$ -val.

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

## Példa

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Mátrix transzponáltja

Mátrix transzponáltja mindig létezik:  $(n \times m)$ -es mátrix transzponáltja  $(m \times n)$ -es.

**Definíció: mátrix transzponáltja**

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

# Műveleti tulajdonságok

- $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- $A + B = B + A$ ;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  és  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ ;
- $(A^T)^T = A$ ;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ .

Valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

## Jelölés

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor  $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$ .

# Speciális mátrixok

**Definíció:** szimmetrikus mátrix.

Az  $A$  mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz  $A^T = A$ .

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Megjegyzés:**

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz  $(n \times n)$ -es. Az  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  négyzetes mátrix főátlóját az  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  elemek alkotják.

**Definíció: trianguláris mátrix.**

Egy  $(n \times n)$ -es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

**Példa:**

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
 (felső trianguláris mátrix),

- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
 (alsó trianguláris mátrix).

**Definíció: diagonális mátrix.**

Az  $(n \times n)$ -es  $A$  mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

**Példa:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Definíció:** egységmátrix.

Az  $(n \times n)$ -es egységmátrix az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele:  $E_n$ .

**Példa:**

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$



**Definíció:** zérómátrix.

Az  $(n \times n)$ -es zérómátrix az a mátrix, amelynek minden eleme 0.

Jele:  $Z_n$  vagy  $0_n$ .

**Példa:**

$$Z_1 = (0), \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

A félév végén legfeljebb 5 plusz pontot lehet szerezni az előadáson.

## Kahoot

Ezen az előadáson a <https://kahoot.com/> oldalon lehetett online tesztek megoldani, egyelőre ez csak próba volt.

A következő feladatok szerepeltek.

# Igaz vagy Hamis?

- Bárhogy választunk  $A$  és  $B$  mátrixokat  $AB \neq BA$ .

# Igaz vagy Hamis?

- Bárhogy választunk  $A$  és  $B$  mátrixokat  $AB \neq BA$ .

**Hamis**, pl:  $A = E_n$  és  $B$  tetszőleges  $(n \times n)$ -es mátrixokra  $AB = BA$ .

# Igaz vagy Hamis?

- Bárhogy választunk  $A$  és  $B$  mátrixokat  $AB \neq BA$ .

**Hamis**, pl:  $A = E_n$  és  $B$  tetszőleges  $(n \times n)$ -es mátrixokra  $AB = BA$ .

- Ha az  $A$  mátrix  $4 \times 5$ -ös, akkor  $A \cdot A^T$  mátrix is  $4 \times 5$ -ös.

# Igaz vagy Hamis?

- Bárhogy választunk  $A$  és  $B$  mátrixokat  $AB \neq BA$ .

**Hamis**, pl:  $A = E_n$  és  $B$  tetszőleges  $(n \times n)$ -es mátrixokra  $AB = BA$ .

- Ha az  $A$  mátrix  $4 \times 5$ -ös, akkor  $A \cdot A^T$  mátrix is  $4 \times 5$ -ös.

**Hamis**,  $A^T$  mátrix  $5 \times 4$ -es, így a szorzat  $4 \times 4$ -es lesz.

# Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  és  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , akkor

- (a)  $A + B$  létezik.
- (b)  $A \cdot B$  nem létezik.
- (c)  $4A + B^T$  létezik.
- (d)  $4A$  nem létezik.

# Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  és  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , akkor

- (a)  $A + B$  létezik.
- (b)  $A \cdot B$  nem létezik.
- (c)  $4A + B^T$  létezik.
- (d)  $4A$  nem létezik.

A (c) állítás az igaz.