13. Előadás

1.

Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor az AB mátrix is az, valamint $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

1.

Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor az AB mátrix is az, valamint $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

$\mathbb{HAMIS}$

1.

Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor az AB mátrix is az, valamint $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

HAMIS

Helyesen:

Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor az AB mátrix is az, valamint $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.

Az $A \cdot X = A$ mátrixegyenlet ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) egyetlen megoldása az egységmátrix.

2.

Az $A \cdot X = A$ mátrixegyenlet ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) egyetlen megoldása az egységmátrix.

HAMIS

2.

Az $A \cdot X = A$ mátrixegyenlet ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) egyetlen megoldása az egységmátrix.

$\mathbb{HAMIS}$

Indoklás:

Ez csak akkor igaz, ha A invertálható.

3.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan ismeretlene, amelyik szabad.

3.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan ismeretlene, amelyik szabad.

HAMIS

3.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan ismeretlene, amelyik szabad.

HAMIS

Indoklás:

Ha egy megoldása van, akkor nincs szabad ismeretlene.

Megjegyzés: Melyik tétel szól a lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról?

4.

Ha egy mátrix sorai (mint vektorok) lineárisan függetlenek és oszlopai (mint vektorok) szintén lineárisan függetlenek, akkor a mátrix invertálható.

4.

Ha egy mátrix sorai (mint vektorok) lineárisan függetlenek és oszlopai (mint vektorok) szintén lineárisan függetlenek, akkor a mátrix invertálható.

IGAZ

4.

Ha egy mátrix sorai (mint vektorok) lineárisan függetlenek és oszlopai (mint vektorok) szintén lineárisan függetlenek, akkor a mátrix invertálható.

IGAZ

Indoklás:

A feltételekből következik, hogy a mátrix négyzetes, melynek determinánsa nem 0.

5.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak, akkor a lineáris egyenletrendszer homogén.

5.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak, akkor a lineáris egyenletrendszer homogén.

IGAZ

5.

Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak, akkor a lineáris egyenletrendszer homogén.

IGAZ

Indoklás:

Tétel. Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

6.

Ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangja eggyel növekszik, amint hozzávesszük a v_{n+1} vektort, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független.

6.

Ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangja eggyel növekszik, amint hozzávesszük a v_{n+1} vektort, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független.

HAMIS

6.

Ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangja eggyel növekszik, amint hozzávesszük a v_{n+1} vektort, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független.

HAMIS

Indoklás:

$v_1 = \cdots = v_n = \mathbf{0}$ és $v_{n+1} \neq \mathbf{0}$

7.

Ha U altér V-ben és U' altér U-ban, akkor U' altér V-ben.

7.

Ha U altér V-ben és U' altér U-ban, akkor U' altér V-ben.

$\mathbb{IGAZ}$

7.

Ha U altér V-ben és U' altér U-ban, akkor U' altér V-ben.

IGAZ

Indoklás:

$\mathbf{0}_{U'} = \mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V$, és U' zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

8.

Ha az A mátrix invertálható, akkor az A^{2020} mátrix is invertálható.

8.

Ha az A mátrix invertálható, akkor az A^{2020} mátrix is invertálható.

$\mathbb{IGAZ}$

8.

Ha az A mátrix invertálható, akkor az A^{2020} mátrix is invertálható.

IGAZ

Indoklás:

$$\left(A^{2020}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{2020}$$

9.

Ha $V = \mathbb{R}^5$ és $U_1, U_2 \leq V$ olyan alterek, amelyek dimenziója legalább 3, akkor $U_1 \cap U_2$ dimenziója legalább 1.

9.

Ha $V = \mathbb{R}^5$ és $U_1, U_2 \leq V$ olyan alterek, amelyek dimenziója legalább 3, akkor $U_1 \cap U_2$ dimenziója legalább 1.

$\mathbb{IGAZ}$

9.

Ha $V = \mathbb{R}^5$ és $U_1, U_2 \leq V$ olyan alterek, amelyek dimenziója legalább 3, akkor $U_1 \cap U_2$ dimenziója legalább 1.

$\mathbb{IGAZ}$

Indoklás:

$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \geq 3 + 3 - 5 = 1$

10.

Tetszőleges $(n \times n)$-es trianguláris mátrix rangja n.

10.

Tetszőleges $(n \times n)$-es trianguláris mátrix rangja n.

HAMIS

10.

Tetszőleges $(n \times n)$-es trianguláris mátrix rangja n.

HAMIS

Ellenpélda:

A $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix is trianguláris.

11.

Egy 3-dimenziós valós vektortérnek pontosan négy altere van: egy 0-dimenziós, egy 1-dimenziós, egy 2-dimenziós és egy 3-dimenziós.

11.

Egy 3-dimenziós valós vektortérnek pontosan négy altere van: egy 0-dimenziós, egy 1-dimenziós, egy 2-dimenziós és egy 3-dimenziós.

HAMIS

11.

Egy 3-dimenziós valós vektortérnek pontosan négy altere van: egy 0-dimenziós, egy 1-dimenziós, egy 2-dimenziós és egy 3-dimenziós.

HAMIS

Indoklás:

Csak a 0- és 3-dimenziós alterekből van egy darab.

12.

A Cramer-szabály nem alkalmazható homogén lineáris egyenletrendszerekre, mert valamennyi konstans értéke 0.

12.

A Cramer-szabály nem alkalmazható homogén lineáris egyenletrendszerekre, mert valamennyi konstans értéke 0.

HAMIS

12.

A Cramer-szabály nem alkalmazható homogén lineáris egyenletrendszerekre, mert valamennyi konstans értéke 0.

HAMIS

A Cramer-szabály szabályos egyenletrendszerekre alkalmazható.

13.

Ha a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan függő ($r \geq 2$), akkor $v_r \in [v_1, \ldots, v_{r-1}]$.

13.

Ha a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan függő ($r \geq 2$), akkor $v_r \in [v_1, \ldots, v_{r-1}]$.

HAMIS

13.

Ha a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan függő ($r \geq 2$), akkor $v_r \in [v_1, \ldots, v_{r-1}]$.

HAMIS

Ellenpélda:

$v_1 = (0, 0)$ és $v_2 = (0, 1)$

14.

A $V = \mathbb{R}^{2020}$ vektortérnek van olyan altere, amelyben csak véges sok bázis van.

14.

A $V = \mathbb{R}^{2020}$ vektortérnek van olyan altere, amelyben csak véges sok bázis van.

$\mathbb{IGAZ}$

14.

A $V = \mathbb{R}^{2020}$ vektortérnek van olyan altere, amelyben csak véges sok bázis van.

$\mathbb{IGAZ}$

Indoklás:

$\{\mathbf{0}\}$

15.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a $\lambda = 0$ sajátértéke, akkor az A determinánsa 0.

15.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a $\lambda = 0$ sajátértéke, akkor az A determinánsa 0.

$\mathbb{IGAZ}$

15.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a $\lambda = 0$ sajátértéke, akkor az A determinánsa 0.

$\mathbb{IGAZ}$

Indoklás:

Ha a 0 sajátértéke A-nak, akkor
$|A - \lambda E| = |A - 0 \cdot E| = |A| = 0.$

16.

Ha az $u_1, \dots, u_n$ vektorrendszer generátorrendszer és a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, akkor az $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független generátorrendszer, azaz bázis.

16.

Ha az $u_1, \ldots, u_n$ vektorrendszer generátorrendszer és a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, akkor az $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független generátorrendszer, azaz bázis.

HAMIS

16.

Ha az $u_1, \ldots, u_n$ vektorrendszer generátorrendszer és a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, akkor az $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független generátorrendszer, azaz bázis.

HAMIS

Ellenpélda:

$\mathbb{R}^2$ vektortérben $u_1 = (1, 2), \ u_2 = (2, 3)$ vektorrendszer generátorrendszer (és bázis is), de bármely vektort hozzávéve, már nem lesz bázis.

17.

Ha $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$) homogén lineáris egyenletrendszer kötött, illetve szabad változóinak száma k, illetve s, akkor $k + s = 3$.

17.

Ha $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$) homogén lineáris egyenletrendszer kötött, illetve szabad változóinak száma k, illetve s, akkor $k + s = 3$.

HAMIS

17.

Ha $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(A \in \mathbb{R}^{3\times 5})$ homogén lineáris egyenletrendszer kötött, illetve szabad változóinak száma k, illetve s, akkor $k + s = 3$.

HAMIS

Indoklás:

$k + s = 5$

18.

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének bázisa pontosan annyi vektorból áll, mint amennyi a szabad változók száma.

18.

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének bázisa pontosan annyi vektorból áll, mint amennyi a szabad változók száma.

IGAZ

18.

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének bázisa pontosan annyi vektorból áll, mint amennyi a szabad változók száma.

IGAZ

Indoklás:

$$\begin{array}{cccccc} & \ldots & x_{i_1} & \ldots & x_{i_r} & \ldots\,) \\ (& \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots\,) \\ & & & \vdots & & \\ (& \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots\,) \end{array}$$

19.

A $V = \mathbb{R}^2$ vektortér $U = \{(x_1, x_2)\colon x_1 + x_2 = 1\}$ részhalmaza altere V-nek.

19.

A $V = \mathbb{R}^2$ vektortér $U = \{(x_1, x_2) \colon x_1 + x_2 = 1\}$ részhalmaza altere V-nek.

$\mathbb{HAMIS}$

19.

A $V = \mathbb{R}^2$ vektortér $U = \{(x_1, x_2) \colon x_1 + x_2 = 1\}$ részhalmaza altere V-nek.

HAMIS

Indoklás

$\mathbf{0} \notin U$

20.

A $V = \mathbb{R}^4$ vektortér $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 + x_2 = 0\}$ részhalmaza altere V-nek, és U 1-dimenziós.

20.

A $V = \mathbb{R}^4$ vektortér $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 + x_2 = 0\}$ részhalmaza altere V-nek, és U 1-dimenziós.

HAMIS

20.

A $V = \mathbb{R}^4$ vektortér $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 + x_2 = 0\}$ részhalmaza altere V-nek, és U 1-dimenziós.

HAMIS

Indoklás

U altér, de a homogén lineáris „egyenletrendszer" megoldása: $x_1 = -x_2$ és x_2, x_3, x_4 szabad ismeretlenek, így U 3-dimenziós.

21.

Ha A invertálható mátrix és $ABBA = A^2$, akkor a B mátrix is invertálható.

21.

Ha A invertálható mátrix és $ABBA = A^2$, akkor a B mátrix is invertálható.

$\mathbb{IGAZ}$

21.

Ha A invertálható mátrix és $ABBA = A^2$, akkor a B mátrix is invertálható.

$\mathbb{IGAZ}$

Indoklás:

A^{-1}-vel jobbról és balról is szorozva kapjuk, hogy $B^2 = E$, így invertálható.

22.

Bármely $u_1, u_2 \in V$ vektorok esetén az $[u_1, u_2]$ altér dimenziója 2.

22.

Bármely $u_1, u_2 \in V$ vektorok esetén az $[u_1, u_2]$ altér dimenziója 2.

$\mathbb{HAMIS}$

22.

Bármely $u_1, u_2 \in V$ vektorok esetén az $[u_1, u_2]$ altér dimenziója 2.

HAMIS

Indoklás:

Ha u_1 és u_2 lineárisan függők, és legalább az egyik nem a zérusvektor, akkor a dimenzió 1.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Tekintsük a V vektortérben egy $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszert, melynek a rangja r, ekkor ...

(A) V pontosan k-dimenziós.

(B) V legfeljebb k-dimenziós.

(C) V pontosan r-dimenziós.

(D) V legalább r-dimenziós.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Tekintsük a V vektortérben egy $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszert, melynek a rangja r, ekkor ...

(A) V pontosan k-dimenziós.

(B) V legfeljebb k-dimenziós.

(C) V pontosan r-dimenziós.

(D) V legalább r-dimenziós.

A (D) állítás az igaz.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor ...

(A) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor ...

(A) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

(B) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legalább két dimenziós.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor ...

(A) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

(B) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legalább két dimenziós.

(C) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor legalább két kötött ismeretlen van.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor …

(A) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

(B) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legalább két dimenziós.

(C) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor legalább két kötött ismeretlen van.

(D) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legfeljebb két dimenziós.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor ...

(A) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

(B) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legalább két dimenziós.

(C) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor legalább két kötött ismeretlen van.

(D) ha az $(1,1,1,2)$ és $(2,2,2,3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legfeljebb két dimenziós.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer, ekkor ...

(A) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor az általános megoldásban legalább két szabad ismeretlen szerepel.

(B) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legalább két dimenziós.

(C) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 4)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor legalább két kötött ismeretlen van.

(D) ha az $(1, 1, 1, 2)$ és $(2, 2, 2, 3)$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor a megoldástér legfeljebb két dimenziós.

A (B) állítás az igaz.

A NÉGY ÁLLÍTÁS KÖZÜL PONTOSAN EGY IGAZ.

(A) Ha egy mátrixnak λ_1 és λ_2 sajátértéke, akkor $\lambda_1 + \lambda_2$ is sajátértéke.

(B) Ha egy mátrixnak v sajátvektora, akkor $-v$ is az.

(C) Ha egy mátrixnak v_1 és v_2 sajátvektora, akkor az egyik vektor a másiknak skalárszorosa.

(D) A fenti három állítás mindegyike hamis.

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

(A) Ha egy mátrixnak λ_1 és λ_2 sajátértéke, akkor $\lambda_1 + \lambda_2$ is sajátértéke.

(B) Ha egy mátrixnak v sajátvektora, akkor $-v$ is az.

(C) Ha egy mátrixnak v_1 és v_2 sajátvektora, akkor az egyik vektor a másiknak skalárszorosa.

(D) A fenti három állítás mindegyike hamis.

A (B) állítás az igaz.

Kahoot

Az előadáson a `https://kahoot.com/` oldalon lehetett online teszteket megoldani.

A következő feladatok szerepeltek.

Igaz vagy Hamis?

- Ha A egy 4×5-ös és B egy 5×5-ös mátrix, akkor az AB és BA szorzatmátrix is létezik.

Igaz vagy Hamis?

- Ha A egy 4×5-ös és B egy 5×5-ös mátrix, akkor az AB és BA szorzatmátrix is létezik.

Hamis, BA nem létezik.

Igaz vagy Hamis?

- Ha A egy 4×5-ös és B egy 5×5-ös mátrix, akkor az AB és BA szorzatmátrix is létezik.

Hamis, BA nem létezik.

- Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával.

Igaz vagy Hamis?

- Ha A egy 4×5-ös és B egy 5×5-ös mátrix, akkor az AB és BA szorzatmátrix is létezik.

Hamis, BA nem létezik.

- Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával.

Igaz.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, és U altér V-ben, amelyre $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Ekkor ...

(A) a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan függő.

(B) az U altér 4 dimenziós.

(C) $\mathbf{0} \notin U$.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, és U altér V-ben, amelyre $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Ekkor ...

(A) a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan függő.

(B) az U altér 4 dimenziós.

(C) $\mathbf{0} \notin U$.

Az (A) állítás az igaz.