12. Előadás

Bevezetés az operációkutatásba

A gyakorlatban felmerülő konkrét problémák általában nem egyszerű lineáris egyenletrendszerekre vezetnek, hanem legtöbbször speciális feltételek is adottak: egyenletek helyett például egyenlőtlenségek szerepelhetnek, a változók általában nem negatívak. Ráadásul legtöbbször nem az összes megoldást keressük, hanem egy bizonyos szempontból optimális megoldást. Az ilyen problémák megoldásával foglalkozik az operációkutatás, ezen belül a **lineáris programozással** megoldható feladatokkal fogunk foglalkozni.

Példa

Egy gyárban 3 féle terméket gyártanak: széket (S), asztalt (A), ajtót (J), melyekhez 2 féle nyersanyag szükséges: faforgács (F) és ragasztó (R). Az egyes termékekhez szükséges nyersanyagmennyiségeket az alábbi mátrix tartalmazza:

$$\begin{array}{c} \\ S \\ A \\ J \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A cégnek a székeken 10 Ft, az asztalokon 4 Ft, az ajtókon pedig 3 Ft nyeresége van, míg a raktáraiban 100 egységnyi faforgácsa és 50 egységnyi ragasztója van.
Melyik termékből mennyit állítson elő, hogy a profit maximális legyen?

A probléma az alábbi feladatra vezet: keressük azon (x_1, x_2, x_3) valós számokat (most tekintsünk el attól, hogy egészeket keresünk, hiszen az x_i-k a termékek darabszámát jelölik), amelyekre:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ezen (x_1, x_2, x_3) megoldások közül szeretnénk meghatározni egy olyat, amelyre a

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

érték maximális.

Alapfeladat

Alapfeladat

A lineáris programozás az alábbi alakú problémákkal foglalkozik:

$$
\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + \ldots + b_{11}y_1 + \ldots + & \leq (\geq) & c_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_1 & \leq (\geq) & d_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
d_{11}x_1 + \ldots + e_{11}y_1 + & \rightarrow & \min(\max)
\end{array}
$$

Azaz lineáris egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepelnek, valamint némely változókra ($x_1, \ldots$) vonatkoznak alsó illetve felső korlátok, más változókra ($y_1, \ldots$) nincs semmilyen korlát. Ezen kívül adott egy függvény (az úgynevezett célfüggvény), és olyan megoldást keresünk, amelyre az adott függvény minimális (maximális) értéket vesz fel.

Az alapfeladat átalakítása

A probléma megoldásához először átalakítjuk a feltételeket, a következőképpen:

- A joboldali konstansok legyenek nemnegatívak.
- A többváltozós egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeljenek.
- MINDEN x változóra egy feltétel vonatkozzon csak: $x \geq 0$.
- A célfüggvényt minimalizálni kelljen (ne maximalizálni).

Az átalakítások legtöbbször természetesen adódnak, nézzünk most néhány példát.

Példa

- Ha egy egyenlőtlenség jobb oldala negatív, szorozzuk meg -1-gyel:

$$x_1 - 2x_3 + x_3 \geq -3$$

helyett

$$-x_1 + 2x_3 - x_3 \leq 3.$$

- Egyenlőtlenségeket új változók segítségével alakítsunk egyenletté:
  - $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3$ helyett

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 3 \\ x_4 & \geq & 0, \end{array}$$

  - $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3$ helyett

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

- Korlát nélküli változókat helyettesítsünk két korlátos változóval: y helyett

$$\begin{aligned} y &= x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Ha a célfüggvényt maximalizálni kell, akkor szorozzuk meg -1-gyel:

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

helyett

$$-10x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min.$$

Ezen átalakítások előbb-utóbb véget érnek, vagyis ha valamit egy átalakítással kijavítunk, azzal nem rontunk el valami mást.
Elvégezve a megfelelő átalakításokat, a feladat speciális alakú lesz: úgynevezett standard feladat.

Standard feladat

Standard feladat

Az alábbi alakú problémát nevezzük *standard feladatnak*:

$$\begin{array}{rcc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1, x_2, \dots & \geq & 0 \\ \hline c_1x_1 + c_2x_2 + \dots & \to & \min, \end{array},$$

ahol $b_1, \dots \geq 0$.

Azaz standard feladat esetén

- MINDEN változóra az a feltétel, hogy nemnegatív,
- a célfüggvényt MINIMALIZÁLJUK,
- az egy változóra vonatkozó $x_i \geq 0$ feltételek kivételével csak egyenletek szerepelnek, NEMNEGATÍV jobboldallal.

Lehetséges kanonikus alakú feladat

Lehetséges kanonikus alakú feladat

Az alábbi alakú standard feladatokat hívjuk *lehetséges kanonikus alakú feladatoknak* (l.k.a.f.):

$$\begin{array}{ccc} x_1 + a_{11} y_1 + \dots & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1, \dots, y_1, \dots & \geq & 0 \\ \hline c_1 y_1 + \dots & \to & \min \end{array},$$

ahol $b_1, \dots \geq 0$.

Azaz a l.k.a.f-ban minden egyenlethez tartozik egy változó, amely csak az adott egyenletben szerepel (még a célfüggvényben sem!), és az adott egyenletben az együtthatója 1, ezek az úgynevezett *kiemelt változók*.

♣ példa

A következő feladat lehetséges kanonikus alakú feladat:

$$
\begin{array}{rcc}
-2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
2x_1 + x_3 + x_4 - 3x_6 & = & 4 \\
3x_1 - 3x_3 + x_5 - 2x_6 & = & 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 & \\
\hline
2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
\end{array}
$$

Ugyanis:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_2 & + & & & & & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
& & x_4 & + & & & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
& & & & x_5 & + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
& & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 & \\
\hline
& & & & & & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
\end{array}
$$

kiemelt változók: x_2, x_4, x_5.

A lehetséges kanonikus alakú feladat egy fontos jellemzője, hogy könnyen leolvasható belőle az egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása.

Bázismegoldás

Bázismegoldásnak nevezzük, ha a kiemelt változók az egyenletek jobboldali konstansaival egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel.

A ♣ példa esetén:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_2 & + & & & & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
 & & x_4 & + & & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
 & & & & x_5 \; + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 & \\
\hline
 & & & & & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \to & \min
\end{array}
$$

a bázismegoldás: $x_2 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_1 = x_3 = x_6 = 0$.

Szimplex algoritmus

A módszer lényege, hogy a lehetséges kanonikus alakú feladatokat elemi bázistranszformációk sorozatával oldjuk meg: első lépésként felírjuk a feladat *szimplex tábláját*.

A táblázat sorai az egyenleteknek felelnek meg, a sorok elején most nem a bázis vektorok, hanem a definícióban szereplő kiemelt változók, a célfüggvényt pedig egy külön sorba írjuk.

A ♣ példa:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
x_2 & + & & & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
& & x_4 & + & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
& & & x_5 \; + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
& & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 & \\
\hline
& & & & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \to & \min
\end{array}$$

Szimplex táblája:

	x_1	x_3	x_6	
x_2	-2	-2	-2	3
x_4	2	1	-3	4
x_5	3	-3	-2	5
	2	3	5	0

A szimplex algoritmus vége

Az algoritmus lényege, hogy a fenti táblázatban megfelelő generáló elemet választva egyre közelebb kerülünk az optimális megoldáshoz.

A szimplex algoritmus vége

Az algoritmus kétféle eredménnyel érhet véget:

1. Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható: ekkor a bázismegoldás optimális. A célfüggvény optimumának -1-szerese a jobb alsó sarokban szereplő szám.
2. Ha a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám: ekkor a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

Az első esetre példa a ♣ l.k.a.f.

Példa

$$\begin{array}{rcc} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline -x_2 & \to & \min \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladat esetén a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

Ugyanis a szimplex táblája:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \\ \hline x_1 & -1 & 0 \\ \hline & -1 & 0 \end{array}$$

tehát a célfüggvény negatív együtthatójánál nincs pozitív szám, így az előző dián szereplő 2. eset áll fenn.

Generáló elem kiválasztása

A generáló elem kiválasztása többféleképpen történhet, a legegyszerűbb algoritmus:

Generáló elem kiválasztása

- Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható, vagy van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor az algoritmus véget ért (ld.: "A szimplex algoritmus vége" dia).
- Ha nem teljesülnek az előző feltételek, akkor van olyan negatív célfüggvény-együttható, melynek oszlopában szerepel pozitív szám:
    1. keressük meg ezen célfüggvény-együtthatók közül a legkisebbet,
    2. majd az oszlopában válasszuk azt a pozitív együtthatót generáló elemnek, melynek kiválasztása esetén a jobboldali konstansok egyike sem válik negatívvá, ehhez azt az elemet kell választani, ahol a konstans/együttható hányados a legkisebb lesz.

Példa

	x_4	x_5	x_6	x_7		arány
x_1	1	2	1	-1	3	$3/1$
x_2	-1	0	2	2	4	$4/2$
x_3	3	-1	3^*	1	5	$5/3$
	-1	1	$\underline{-3}$	2	-2	

A -3 a legkisebb olyan negatív célfüggvény-együttható, amelynek oszlopában szerepel pozitív szám. Az utolsó oszlop tartalmazza a konstans/együttható hányadosokat, ezek közül a 3-hoz tartozó hányados a legkisebb, így azt választjuk generáló elemnek.
Ha a -3 oszlopában más generáló elemet választottunk volna, akkor a konstans oszlopban a következő lépésben megjelennének negatív számok.

Generáló elemet addig kell választanunk, míg az algoritmus véget nem ér (ld.: "A szimplex algoritmus vége" dia).

Megjegyzések

- Az algoritmus hibája, hogy előfordulhat, hogy végtelen ciklusba esik, vagyis folyamatosan választva generáló elemeket, mindig visszatérünk egy korábbi esethez.
- A generáló elem kiválasztásának bonyolításával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen ciklusok elkerülhetők.
- Ide elrejtettem valamit.

Példa

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 + 2x_4 & = & 8 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ \hline & & & & -2x_3 - x_4 & \rightarrow & \min \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1^* & 0 & 3 \\ x_2 & 2 & 2 & 8 \\ \hline & \underline{-2} & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_4 & \\ \hline x_3 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & -2 & 2^* & 2 \\ \hline & 2 & \underline{-1} & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline x_3 & 1 & 0 & 3 \\ x_4 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & 7 \end{array}$$

Nincs negatív célfüggvény-együttható, ezért a bázismegoldás: $(0, 0, 3, 1)$ optimális, a célfüggvény értéke ezen a helyen: -7.

Példa

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & x_3 - x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 - 3x_4 & = & 8 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ \hline & & & & -2x_3 - x_4 & \to & \min \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1^* & -1 & 3 \\ x_2 & 2 & -3 & 8 \\ \hline & \underline{-2} & -1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_4 & \\ \hline x_3 & 1 & -1 & 3 \\ x_2 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & 6 \end{array}$$

Mivel a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, így a célfüggvény alulról nem korlátos, bármilyen kis értéket felvehet.

Kahoot

Az előadáson a https://kahoot.com/ oldalon lehetett online teszteket megoldani.

A következő feladatok szerepeltek.

Igaz vagy Hamis?

- Ha egy lineáris programozási feladat szimplex táblája a lenti táblázat, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos.

	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	-3	2	4
x_2	1	-2	3	5
	1	-1	3	0

Igaz, mivel a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris programozási feladat szimplex táblája a lenti táblázat, akkor …

	x_3	x_4	x_5	
x_1	3	4	2	4
x_2	1	5	3	5
	1	1	3	-6

(a) a bázismegoldás optimális.

(b) a célfüggvény értéke -6.

(c) a célfüggvény alulról nem korlátos.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris programozási feladat szimplex táblája a lenti táblázat, akkor …

	x_3	x_4	x_5	
x_1	3	4	2	4
x_2	1	5	3	5
	1	1	3	-6

(a) a bázismegoldás optimális.

(b) a célfüggvény értéke -6.

(c) a célfüggvény alulról nem korlátos.

A (a) állítás az igaz.