10. Előadás

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció (Homogén lineáris egyenletrendszer).

Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ és $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathbf{b} = (0, \ldots, 0)^T$. Azaz, ha lineáris egyenletrendszerünk

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1}\cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

alakú.

Jelölje U_A a fenti homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát.

Ekkor U_A az alábbi tulajdonságokkal bír:

1. $\mathbf{0} \in U_A$ ($\mathbf{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek);
2. ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_A$, akkor $A\mathbf{x}_1^T = \mathbf{0}^T$ és $A\mathbf{x}_2^T = \mathbf{0}^T$, aminek következtében $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T + \mathbf{0}^T = A\mathbf{x}_1^T + A\mathbf{x}_2^T = A(\mathbf{x}_1^T + \mathbf{x}_2^T) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^T$, így $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in U_A$ (U_A zárt az összeadásra);
3. ha $\mathbf{x} \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, aminek következtében $\mathbf{0}^T = \lambda \cdot \mathbf{0}^T = \lambda \cdot (A\mathbf{x}^T) = A(\lambda \cdot \mathbf{x})^T$, így $\lambda \cdot \mathbf{x} \in U_A$ (U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

Tétel.

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

Tétel.

Lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

Példa.

Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-t. Határozzuk meg U_A-t, ahol A az egyenletrendszer mátrixa.

A HLER bővített mátrixának lépcsős alakja:

$$(A \mid \mathbf{0}^T) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Megjegyzések.

1. A bővített mátrix utolsó oszlopa az elemi átalakítások során nem változik, így akár el is hagyható.
2. A lépcsős alakból MINDEN leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó van, továbbá
$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$
3. U_A-ban bázist kapunk, ha ügyesen választjuk meg a szabad változók értékét:
    - $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
    - $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

   A v_1, v_2 vektorrendszer bázis az U_A altérben, így dimenziója 2.

Definíció (Fundamentális megoldásrendszer)**.**

HLER megoldásai alterének bázisát **fundamentális megoldásrendszernek** nevezzük.

Példa.

A $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ vektorrendszer fundamentális megoldásrendszere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-nek.

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszernek $r = r(A)$ darab kötött és $n - r$ darab szabad változója van, ezért az U_A altér dimenziója $n - r$. Ha a szabad változók $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_n}$, akkor az alábbi $(n - r)$-esekhez tartozó

$$\begin{array}{llllr}
x_{i_{r+1}} = 1 & x_{i_{r+2}} = 0 & \ldots & x_{i_n} = 0 & v_1 = (\ldots, 1, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots) \\
x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 1 & \ldots & x_{i_n} = 0 & v_2 = (\ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots) \\
 & & & \vdots & \\
x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 0 & \ldots & x_{i_n} = 1 & v_{n-r} = (\ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, 1, \ldots)
\end{array}$$

megoldások fundamentális megoldásrendszert alkotnak. Azaz, ha a szabad változók helyébe ezeket az értékeket helyettesítjük, és meghatározzuk a kötött változók értékét, akkor ezek a konkrét megoldás-vektorok az U_A megoldásaltér egy bázisát adják.

Példa.

Tekintsük az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ HLER-t, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Négy kötött (x_1, x_3, x_4, x_5) és négy szabad ismeretlen van (x_2, x_6, x_7, x_8), az U_A altér dimenziója $n - r(A) = 8 - 4 = 4$. A HLER egy fundamentális megoldásrendszere:

$$\begin{array}{ll} x_2 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0 & v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ x_2 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0 & v_2 = (11, 0, 0, -2, -14, 1, 0, 0) \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0 & v_3 = (1, 0, 0, 0, -5, 0, 1, 0) \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1 & v_4 = (3, 0, -2, -1, 0, 0, 1) \end{array}$$

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor vannak olyan $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok, amelyekre $U = [v_1, \dots, v_k]$ teljesül.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ -6 & 6 & -6 & -3 \\ 8 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Ekkor U_A altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amelynek fundamentális megoldásrendszere a $v_1 = (13/18, -5/5, -37/18, 1)$ vektorrendszer, ezért $U_A = [v_1]$.

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor van olyan $m \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hogy $U = U_A$.

Példa.

Legyen $U = \{(a,b,c,d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\}$. Ekkor U altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben és

$$\begin{aligned} U &= \{(a,b,c,d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\} \\ &= \{(a,b,c,d) \mid a - b + 2c = 0 \text{ és } a - b + c - d = 0\} = U_A, \end{aligned}$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sajátérték, sajátvektor

Sajátérték és sajátvektor

Definíció (Mátrix sajátértéke).

Az A $(n \times n)$-es mátrixnak **sajátértéke** a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

Definíció (Mátrix sajátvektora).

Az A $(n \times n)$-es mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

A fenti definíciókban azért szerepel v^T, mert $\mathbb{R}^n$ elemeit sorvektorokként írjuk, de itt jobbról szorzunk a vektorral egy mátrixot, amit csak akkor tudunk elvégezni, ha oszlopvektorként szerepel.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, ekkor

- a $\lambda = 3$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (0, -1, 1)$ vektorra

$$A \cdot (0, -1, 1)^T = (0, -3, 3)^T = 3 \cdot (0, -1, 1)^T$$

  teljesül.

- a $v = (2, -3, 2)$ vektor sajátvektora A-nak, mivel

$$A \cdot (2, -3, 2)^T = (2, -3, 2)^T = 1 \cdot (2, -3, 2)^T.$$

  A v vektor a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik.

A sajátértékek meghatározása

Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T \Longleftrightarrow A \cdot v^T = \lambda \cdot E_n \cdot v^T$$
$$\Longleftrightarrow (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = \mathbf{0}^T.$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor ennek a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0.

Tétel.

Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha az $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

Definíció (Karakterisztikus polinom).

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Definíció (Karakterisztikus polinom).

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p_A = |A - x \cdot E_2| &= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 35 - x & 45 \\ -6 & 2 - x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 37x + 340. \end{aligned}$$

Az $x^2 - 37x + 340 = 0$ egyenlet megoldásai: 20 és 17. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 20$ és $\lambda_2 = 17$.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az A mátrixnak nincsenek valós sajátértékei.

Sajátaltér meghatározása

Definíció (Sajátaltér).

Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

Tétel (Sajátaltér bázisa).

Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)\underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER egy fundamentális rendszere.

Példa.

Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

1. Az A mátrix karakterisztikus polinomja:
$$p_A = |A - x \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 5 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & -2 & 0-x \end{vmatrix} =$$
$$= (2-x)[(3-x)(-x) - (-2)] = (2-x)(x^2 - 3x + 2) =$$
$$= (2-x)(x-2)(x-1) = -(x-2)^2(x-1).$$
2. Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 1$.
3. Az U_{λ_1}, a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó sajátaltér meghatározása.

U_{λ_1} meghatározása

Meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ HLER-t, melynek mátrixa

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a lépcsős alakból leolvasható, hogy $x_2 = -x_3$, és x_1, x_3 szabad ismeretlen, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(x_1, -x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek bázisa az $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ vektorrendszer.

VIGYÁZAT: $\mathbf{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\mathbf{0}$ nem sajátvektor!!!

Kahoot

Az előadáson a https://kahoot.com/ oldalon lehetett online teszteket megoldani.

A következő feladatok szerepeltek.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Hamis, a $\mathbf{0}$ mindig megoldás.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Hamis, a $\mathbf{0}$ mindig megoldás.

- Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Hamis, a $\mathbf{0}$ mindig megoldás.

- Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke.

Hamis, pl. a korábban vizsgált $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és tekintsük az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszert, ekkor ...

(a) a lineáris egyenletrendszer lehet ellentmondó.

(b) a lineáris egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.

(c) a fundamentális megoldásrendszere $n - r(A)$ elemű.

Feleletválasztás

A három állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és tekintsük az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszert, ekkor ...

(a) a lineáris egyenletrendszer lehet ellentmondó.

(b) a lineáris egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.

(c) a fundamentális megoldásrendszere $n - r(A)$ elemű.

A (c) állítás az igaz.