9. Előadás

Tegyük fel, hogy egy bank 4 különböző eszközbe fektet be (réz, búza, arany és kakaó). Az ügyfeleinek ezen befektetésekből 3 különböző befektetési jegyet kínál, melyekben a fenti eszközök más-más súllyal szerepelnek. Az alábbi mátrix mutatja a három különböző befektetési jegy összetételét —az összes befektetett pénz arányában:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{Réz} & \text{Búza} & \text{Arany} & \text{Kakaó} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{BJ}_1 \\ \text{BJ}_2 \\ \text{BJ}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & -0.2 & 0.1 \\ -0.4 & 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.04 & 0.63 & 0.12 & 0.21 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Lehetséges-e a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani (nyitható short pozíció is), ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna?

A matematikai modell

A befektetési jegyeknek vektorok feleltethetők meg az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \mathrm{BJ}_1 \quad &\leftrightsquigarrow \quad v_1 = (0.6, 0.5, -0.2, 0.1), \\ \mathrm{BJ}_2 \quad &\leftrightsquigarrow \quad v_2 = (-0.4, 0.8, 0.3, 0.3), \\ \mathrm{BJ}_3 \quad &\leftrightsquigarrow \quad v_3 = (0.04, 0.63, 0.12, 0.21), \end{aligned}$$

$$\mathrm{BJ}_4 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_4 = (1, 0, 0, 0).$$

A matematikai probléma: $v_4 \overset{?}{\in} [v_1, v_2, v_3]$.

Megoldás:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	0.6	-0.4	0.04	1
e_2	0.5	0.8	0.63	0
e_3	-0.2	0.3	0.12	0
e_4	**0.1**	0.3	0.21	0

1.	v_2	v_3	v_4
e_1	-2.2	-1.22	1
e_2	**-0.7**	-0.42	0
e_3	0.9	0.54	0
v_1	3	2.1	0

2.	v_3	v_4
e_1	**0.1**	1
v_2	0.6	0
e_3	0	0
v_1	0.3	0

3.	v_4
v_3	10
v_2	-6
e_3	0
v_1	-3

$$v_4 = (-3) \cdot v_1 + (-6) \cdot v_2 + 10 \cdot v_3$$

Válasz:

Lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna.

Mi a válasz akkor, ha a bank nem enged negatív pozíciókat felvenni a befektetési jegyekből?

Válasz:

Ebben az esetben nem lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna. A v_4 egyértelműen állítható elő a v_1, v_2 és v_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

Egy másik bank 6 féle eszközbe fektet, és a következő 3 féle befektetési jegyet értékesíti (mind long, mind short lehetőséggel):

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & -0.3 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.7 & 0.1 & 1.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Az ügyféligények felmérése után a bank megbízza egy munkatársát, hogy alakítson ki egy új befektetési jegyet. A munkatárs a következő befektetési arányokat javasolja az új befektetési jegyhez:

$$(0.4, -0.6, 0.5, 0.6, -0.1, 0.2).$$

Megérdemli-e a munkatárs a fizetését?

A matematikai modell

A befektetési jegyeknek ismét vektorokat feleltetünk meg az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BJ}_1 &\quad \leftrightsquigarrow \quad v_1 = (0.1, 0.2, 0.2, -0.3, 0.2, 0.6), \\
\mathrm{BJ}_2 &\quad \leftrightsquigarrow \quad v_2 = (0.2, -0.7, 0.1, 1.1, 0.2, 0.1), \\
\mathrm{BJ}_3 &\quad \leftrightsquigarrow \quad v_3 = (-0.1, 0.1, -0.2, 0.2, 0.5, 0.5),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{BJ}_4 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_4 = (0.4, -0.6, 0.5, 0.6, -0.1, 0.2).$$

A matematikai probléma: $v_4 \overset{?}{\in} [v_1, v_2, v_3]$.

Megoldás:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	0.1	0.2	-0.1	0.4
e_2	0.2	-0.7	0.1	-0.6
e_3	0.2	0.1	-0.2	0.5
e_4	-0.3	1.1	0.2	0.6
e_5	0.2	0.2	0.5	-0.1
e_6	0.6	0.1	0.5	0.2

$\dots$

3.	v_4
v_1	1
v_2	1
e_3	0
e_4	0
e_5	0
v_3	-1

$$v_4 = v_1 + v_2 - v_3$$

Válasz:

A munkatárs nem érdemli meg a fizetését.

Látván az előző munkatárs kudarcát, a bank vezérigazgatója ezúttal 5 munkatársat bíz meg azzal, hogy 5 különböző új portfóliót dolgozzanak ki. Megérdemli-e a vezérigazgató a fizetését?

Válasz:

Nem, a vezérigazgató nem érdemli meg a fizetését.

Tétel (Kronecker–Capelli-tétel).

Az

$$\begin{cases} a_{1,1}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$r(A) = r(A \mid \mathbf{b}),$$

ahol $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ (a LER mátrixa) és

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$ (a LER bővített mátrixa).

Példa.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A \mid \mathbf{b}) = r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer megoldható.

Példa.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A \mid \mathbf{b}) = 3 \quad \text{és} \quad r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer nem megoldható.

Megjegyzés.

Ha $r(A \mid \mathbf{b}) \neq r(A)$, akkor

$$r(A \mid \mathbf{b}) = r(A) + 1.$$

Definíció (Homogén lineáris egyenletrendszer).

Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathbf{b} = (0, \dots, 0)^T$. Azaz, ha lineáris egyenletrendszerünk

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

alakú.

Jelölje U_A a fenti homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát.

Ekkor U_A az alábbi tulajdonságokkal bír:

1. $\mathbf{0}^T \in U_A$ ($\mathbf{0}^T$ a **triviális megoldása** a HLER-nek);
2. ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_A$, akkor $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}^T$ és $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}^T$, aminek következtében $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T + \mathbf{0}^T = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, így $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in U_A$ (U_A zárt az összeadásra);
3. ha $\mathbf{x} \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}^T$, aminek következtében $\mathbf{0}^T = \lambda \cdot \mathbf{0}^T = \lambda \cdot (A\mathbf{x}) = A(\lambda \cdot \mathbf{x})$, így $\lambda \cdot \mathbf{x} \in U_A$ (U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

Tétel.
Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

Tétel.
Lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

Példa.

Tekintsük az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

HLER-t. Határozzuk meg U_A-t, ahol A az egyenletrendszer mátrixa.

A HLER bővített mátrixának lépcsős alakja:

$$(A \mid \mathbf{0}^T) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Megjegyzések.

1. A bővített mátrix utolsó oszlopa az elemi átalakítások során nem változik, így akár el is hagyható.
2. A lépcsős alakból MINDEN leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó van, továbbá

$$U_A = \left\{ (-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. U_A-ban bázist kapunk, ha ügyesen választjuk meg a szabad változók értékét:
   - $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)^T$,
   - $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)^T$.

   A v_1, v_2 vektorrendszer bázis az U_A altérben, így dimenziója 2.

Definíció (Fundamentális megoldásrendszer).

HLER megoldásai alterének bázisát **fundamentális megoldásrendszernek** nevezzük.

Példa.

A $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ vektorrendszer fundamentális megoldásrendszere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-nek.

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszernek $r = r(A)$ darab kötött és $n - r$ darab szabad változója van, ezért az U_A altér dimenziója $n - r$. Ha a szabad változók $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_n}$, akkor az alábbi $(n - r)$-esekhez tartozó megoldások fundamentális megoldásrendszert alkotnak.

Példa.

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}^T$ HLER-t, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Négy kötött (x_1, x_3, x_4, x_5) és négy szabad ismeretlen van (x_2, x_6, x_7, x_8), az U_A altér dimenziója $n - r(A) = 8 - 4 = 4$. A HLER egy fundamentális megoldásrendszere:

$$\begin{array}{lr} x_2 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0 & v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ x_2 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0 & v_2 = (11, 0, 0, -2, -14, 1, 0, 0)^T \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0 & v_3 = (1, 0, 0, 0, -5, 0, 1, 0)^T \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1 & v_4 = (3, 0, -2, -1, 0, 0, 1)^T \end{array}$$

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor vannak olyan $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorok, amelyekre $U = [v_1, \ldots, v_k]$ teljesül.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ -6 & 6 & -6 & -3 \\ 8 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Ekkor U_A altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amelynek fundamentális megoldásrendszere a $v_1 = (13/18, -5/5, -37/18, 1)$ vektorrendszer, ezért $U_A = [v_1]$.

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor van olyan $m \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hogy $U = U_A$.

Példa.

Legyen $U = \{(a,b,c,d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\}$. Ekkor U altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben és

$$\begin{aligned} U &= \{(a,b,c,d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\} \\ &= \{(a,b,c,d) \mid a - b + 2c = 0 \text{ és } a - b + c - d = 0\} = U_A, \end{aligned}$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sajátérték és sajátvektor

Definíció (Mátrix sajátértéke).

Az A $(n \times n)$-es mátrixnak **sajátértéke** a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

Definíció (Mátrix sajátvektora).

Az A $(n \times n)$-es mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

A fenti definíciókban azért szerepel v^T, mert $\mathbb{R}^n$ elemeit sorvektorokként írjuk, de itt jobbról szorzunk a vektorral egy mátrixot, amit csak akkor tudunk elvégezni, ha oszlopvektorként szerepel.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, ekkor

- a $\lambda = 3$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (0, -1, 1)$ vektorra
$$A \cdot (0, -1, 1)^T = (0, -3, 3)^T = 3 \cdot (0, -1, 1)^T$$
teljesül.
- a $v = (2, -3, 2)$ vektor sajátvektora A-nak, mivel
$$A \cdot (2, -3, 2)^T = (2, -3, 2)^T = 1 \cdot (2, -3, 4)^T.$$
A v vektor a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik.

A sajátértékek meghatározása

Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$\begin{aligned} A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T &\iff A \cdot v^T = \lambda \cdot E_n \cdot v^T \\ &\iff (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = \mathbf{0}^T. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor ennek a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0.

Tétel.

Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha az $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

Definíció (Karakterisztikus polinom).

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Definíció (Karakterisztikus polinom).

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p_A &= |A - x \cdot E_2| = \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 35 - x & 45 \\ -6 & 2 - x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 37x + 340. \end{aligned}$$

Az $x^2 - 37x + 340 = 0$ egyenlet megoldásai: 20 és 17. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 20$ és $\lambda_2 = 17$.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az A mátrixnak nincsenek valós sajátértékei.

Sajátaltér meghatározása

Definíció (Sajátaltér).

Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

Tétel (Sajátaltér bázisa).

Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)\underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER egy fundamentális rendszere.

Példa.

Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda_1 = 2$ sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

1. Az A mátrix karakterisztikus polinomja:
$$p_A = |A - x \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 5 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & -2 & 0-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-1).$$
2. Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 1$. (Valóban sajátérték a 2 valós szám.)
3. U_{λ_1} meghatározása.

U_{λ_1} meghatározása

Meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ HLER-t, melynek mátrixa

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$U_{\lambda_1} = \{(x_1, -x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek bázisa az $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ vektorrendszer.

VIGYÁZAT: $\mathbf{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\mathbf{0}$ nem sajátvektor!!!

Igaz vagy Hamis?

- Ha $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ mátrix egy homogén lineáris egyenletrendszer együttható mátrixa. Ekkor az egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben.

Hamis, mivel $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, így a hozzá tartozó homogén lineáris egyenletrendszer 5 ismeretlent tartamaz, tehát a megoldások $\mathbb{R}^5$ egy alterét alkotják.

- Végtelen sok olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix van, amelynek a $\lambda = 3$ sajátértéke, és a hozzá tartozó sajátaltér két dimenziós.

Hamis, mivel $\mathbb{R}^2$-nek egyetlen kétdimenziós altere $\mathbb{R}^2$, és a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere pontosan akkor lesz a teljes vektortér, ha az együtthatómátrix a zérusmátrix, így $A - 3E_2 = Z_2$, tehát

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszert, ekkor ...

(a) a lineáris egyenletrendszer lehet ellentmondó.

(b) a lineáris egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.

(c) a fundamentális megoldásrendszer $m - r(A)$ elemű.

(d) ha a megoldásaltér a $\{\mathbf{0}\}$, akkor a fundamentális megoldásrendszer 0-elemű.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszert, ekkor ...

(a) a lineáris egyenletrendszer lehet ellentmondó.

(b) a lineáris egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.

(c) a fundamentális megoldásrendszer $m - r(A)$ elemű.

(d) ha a megoldásaltér a $\{\mathbf{0}\}$, akkor a fundamentális megoldásrendszer 0-elemű.

A (d) állítás az igaz.