8. Előadás

Tétel (Lin. független vektorr. részrendszerei)**.**

Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere is az.

Indoklás: Ha az összes vektorból nem lehet előállítani a $\underline{0}$ vektort a triviálistól különböző módon, akkor kevesebb vektorból sem.

Következmény.

Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a teljes vektorrendszer is az.

Példa.

Egy lineárisan függő vektorrendszer részrendszerei között már lehetnek lineárisan függetlenek, például a $(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2),(1,1,2)$ vektorrendszer lineárisan függő, azonban az $(1,1,1)$ részrendszere lineárisan független, sőt az $(1,1,1),(1,1,2)$ vektorrendszer is.

Definíció (Maximális lineárisan független részrendszer).

Vektorrendszer **maximális lineárisan független részrendszerének** nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer továbbra is lineárisan független maradjon.

Az előbbi példában az $(1,1,1),(1,1,2)$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszer, de nem az egyetlen, mivel $(2,2,2),(1,1,2)$ is az.

Definíció (Vektorrendszer rangja)**.**

Vektorrendszer **rangjának** nevezzük a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r, ha kiválasztható r darab lineárisan független vektor közülük, de $(r+1)$ darab már nem.

Példa.

- A $(0,0,0)$ vektorrendszer rangja 0.
- Az $(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)$ vektorrendszer rangja 1.
- Az $(1,1,1),(1,-1,1),(2,-2,2)$ vektorrendszer rangja 2. Maximális lineárisan független részrendszerei: $(1,1,1),(1,-1,1)$ és $(1,1,1),(2,-2,2)$.
- Az $(1,1,1),(0,-1,1),(0,0,2)$ vektorrendszer rangja 3, mivel a vektorrendszer lineárisan független.

Tétel.

Legyen V valós vektortér.

- A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer rangja legfeljebb n, és pontosan akkor n, ha a vektorrendszer lineárisan független.
- Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor r darab lineárisan független vektort kiválasztva belőle, a vektorrendszer minden tagja előáll ezek lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik, ha bővítjük egy olyan vektorral, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.

Tétel.

Legyen V valós vektortér.

- Vektorrendszer rangja nem változik, ha elhagyunk belőle egy olyan vektort, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik meg, ha valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának többszörösét, vagy ha valamely vektorát 0-tól különböző valós számmal szorozzuk meg.

Tétel.

Legyen V valós vektortér, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n \in V$. Ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előáll az $u_1, \dots, u_k$ vektorok mindegyike, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja kisebb vagy egyenlő, mint a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangja.

Tétel (Rangszámítás Gauss-eliminációval).

Az $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer rangját meghatározhatjuk Gauss-eliminációval:

- A vektorrendszer vektorait beírjuk egy mátrix soraiba vagy oszlopaiba.
- Gauss-eliminációt hajtunk végre a mátrixon.
- A lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

Megjegyzés

Ha a Gauss-elimináció elvégzése után nemcsak a vektorrendszer rangjára vagyunk kíváncsiak, hanem egy maximális lineárisan független részrendszert is szeretnénk megadni, akkor a mátrix **soraiba** kell beírnunk a vektorokat. Továbbá a Gauss-elimináció elvégézése után figyelnünk kell, hogy a lépcsős alak nem nulla sorainak melyik eredeti vektor felel meg, mert a sorcsere esetén változhat a sorrend.

Definíció (Mátrix rangjai).

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, azaz legyen A valós mátrix, melynek m sora és n oszlopa van.

- Az A mátrix **sorrangja** a mátrix sorai, mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_s(A)$).
- Az A mátrix **oszloprangja** a mátrix oszlopai, mint $\mathbb{R}^m$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_o(A)$).

Definíció (Determinánsrang).

Az A mátrix **determinánsrangja** a mátrixból kiválasztható legnagyobb méretű nemeltűnő aldetermináns rendje (jel.: $r_d(A)$). Az A mátrix determinánsrangja r, ha A-nak **van olyan** r-rendű aldeterminánsa, amelynek értéke nem 0, és minden r-nél nagyobb rendű aldeterminánsa már 0.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -12 & 3 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 6}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\ 5 & \boxed{-3} & 2 & \boxed{8} & \boxed{10} & 3 \\ 3 & \boxed{2} & 1 & \boxed{6} & \boxed{5} & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & \boxed{-12} & 3 & \boxed{-4} & \boxed{5} & -4 \end{pmatrix}$$

A sorok és oszlopok „metszetében” álló elemekből alkotott 3-rendű aldetermináns értéke -70.

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \frac{41}{26} & \frac{35}{26} & \frac{11}{26} \\
\boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \frac{9}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{17}{26} \\
\boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \frac{15}{26} & \frac{35}{26} & \frac{37}{26} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

A k-rendű aldeterminánsok száma $(k = 3, 4, 5, 6)$ rendre: 700, 525, 126, 7.

Tétel (Rangszámtétel).

Tetszőleges A valós mátrixra

$$r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$$

teljesül.

Definíció (Mátrix rangja).

Az $r_s(A)$, $r_o(A)$ és $r_d(A)$ rangok közös értékét az A mátrix **rangjának** nevezzük (jel.: $r(A)$).

Példa.

Számítsuk ki az $(1,-1,1,1)$, $(-1,2,1,1)$, $(0,1,2,2)$, $(-1,1,1,1)$, $(-1,2,3,3)$, $(0,-1,0,0)$ vektorrendszer rangját.

- A vektorok alkotják a mátrix sorait:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Az $(1,-1,1,1)$, $(-1,2,1,1)$, $(0,1,2,2)$, $(-1,1,1,1)$, $(-1,2,3,3)$, $(0,-1,0,0)$ vektorrendszer rangja 3.
- A megoldás során sorcserét is hajtottunk végre, az első három vektor nem alkot maximális lineárisan független részrendszert. Egy maximális lineárisan független részrendszere például:

$$(1,-1,1,1),(-1,2,1,1),(-1,1,1,1).$$

Tétel (Rangszámítás EBT-vel).

- A vektorokat beírjuk egy EBT-táblázat **oszlopaiba**, majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre, ameddig tudunk.
- A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A sorokba bevitt oszlopcímkék adják az eredeti vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszerét, a számuk pedig a rangot.

Példa.

Számítsuk ki a $v_1 = (1, -1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, -1, -1)$, $v_4 = (1, 2, 4, 0, 2)$, $v_5 = (3, 0, 2, 0, 0)$ vektorrendszer rangját, és adjunk meg benne maximális lineárisan független részrendszert.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1^*	-1	1	1	3
e_2	-1	1	2	2	0
e_3	2	1	1	4	2
e_4	1	0	-1	0	0
e_5	2	1	-1	2	0

1.	v_2	v_3	v_4	v_5
e_2	0	3	3	3
e_3	3	-1	2	-4
e_4	1^*	-2	-1	-3
e_5	3	-3	0	-6

2.	v_3	v_4	v_5
e_2	3^*	3	3
e_3	5	5	5
e_5	3	3	3

3.	v_4	v_5
e_3	0	0
e_5	0	0

A vektorrendszer rangja 3, egy maximális lineárisan független részrendszere:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 1, -1, -1).$$

Definíció (Bázis).

Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

Példa.

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- Az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$-ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- Az $(1, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{3}, 1, 1), (-1, 1, \sqrt{5})$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.

Tétel.

Legyen $v_1, \ldots, v_n$ bázisa a V valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ valós szám-n-es létezik, amelyre

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

teljesül.

Definíció (Koordinátasor).

A $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ valós szám-n-est a v vektor $v_1, \ldots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük.

A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \ldots, a_n)$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \ldots, a_n)$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1,0,\ldots,0)} + \cdots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0,\ldots,0,a_n)} .$$

Példa.

Határozzuk meg az $(1,1,1)$ vektor koordinátasorát a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: \ & e_1 = (1,0,0), && e_2 = (0,1,0), && e_3 = (0,0,1), \\ \mathcal{E}': \ & v_1 = (1,-1,2), && v_2 = (2,-1,7), && v_3 = (1,-2,0) \end{aligned}$$

bázisokban.

Az $\mathcal{E}$ bázisban

Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, amelyekre

$$(1,1,1) = \alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,0) + \gamma \cdot (0,0,1) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

teljesül. ...

Az $\mathcal{E}'$ bázisban

Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1,1,1) = \alpha \cdot (1,-1,2) + \alpha \cdot (2,-1,7) + \gamma \cdot (1,-2,0).$$

Ez az egyenlőség a következő lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1, \\ -\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 1, \\ 2\alpha & + & 7\beta & & & = & 1. \end{array} \right.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$.

Az $\mathcal{E}'$ bázisban

Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1,1,1) = \alpha \cdot (1,-1,2) + \beta \cdot (2,-1,7) + \gamma \cdot (1,-2,0).$$

Ez az egyenlőség a következő lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 1 \cdot \alpha & + & 2 \cdot \beta & + & 1 \cdot \gamma & = & 1, \\ (-1) \cdot \alpha & + & (-1) \cdot \beta & + & (-2) \cdot \gamma & = & 1, \\ 2 \cdot \alpha & + & 7 \cdot \beta & + & 0 \cdot \gamma & = & 1. \end{array} \right.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$.

Definíció (Véges dimenziós vektortér).

A V vektorteret **véges dimenziósnak** nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \ldots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

Tétel.

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Definíció (Dimenzió)**.**

A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján** bázisának közös elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.)

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortér n-dimenziós, az $e_1, \ldots, e_n$ standard bázis bázisa e vektortérnek:

$$e_\ell = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad (1 \leq \ell \leq n).$$

Jelölés

A V valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli, pl.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Tétel (Dimenzió és rang)**.**

A $[v_1, \ldots, v_n]$ altér dimenziója megegyezik a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangjával. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei bázisai ezen altérnek.

Tétel (Lin. független vektorrendszerek és bázisok).

Ha a V vektortér dimenziója n, akkor

- bármely n-elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V-nek;
- bármely n-elemű generátorrendszere bázisa V-nek.

Tétel (EBT).

Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis a V vektortérben, valamint legyen $u \in V$, amelynek koordinátasora ebben a bázisban $(a_1, \dots, a_n)$, azaz $u = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$. Ekkor

$$v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$$

pontosan akkor bázis, ha $a_\ell \neq 0$. Ha a $v \in V$ vektor koordinátasora a $v_1, \dots, v_n$ bázisban $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, akkor a $v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$ bázisban v koordinátasora:

$$\left(\frac{\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1}}{a_\ell}, \frac{\alpha_\ell}{a_\ell}, \frac{\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1}}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n}{a_\ell} \right).$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & \color{blue}{u} & & v & \\
\hline
\color{red}{v_1} & \dots & a_1 & \dots & \alpha_1 & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\color{red}{v_{\ell-1}} & \dots & a_{\ell-1} & \dots & \alpha_{\ell-1} & \dots \\
\color{red}{v_{\ell}} & \dots & a_{\ell} & \dots & \alpha_{\ell} & \dots \\
\color{red}{v_{\ell+1}} & \dots & a_{\ell+1} & \dots & \alpha_{\ell+1} & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\color{red}{v_n} & \dots & a_n & \dots & \alpha_n & \dots
\end{array}$$

„koordináták a régi bázisban”

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & & {\color{red}v_\ell} & & v & \\
\hline
{\color{red}v_1} & \dots & -a_1/a_\ell & \dots & (\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1)/a_\ell & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
{\color{red}v_{\ell-1}} & \dots & -a_{\ell-1}/a_\ell & \dots & (\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1})/a_\ell & \dots \\
{\color{blue}u} & \dots & 1/a_\ell & \dots & \alpha_\ell/a_\ell & \dots \\
{\color{red}v_{\ell+1}} & \dots & -a_{\ell+1}/a_\ell & \dots & (\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1})/a_\ell & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
{\color{red}v_n} & \dots & -a_n/a_\ell & \dots & (\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n)/a_\ell & \dots
\end{array}
$$

„koordináták az új bázisban”

Az induló bázisunk —ált.— az $e_{\mathbf{1}}, \dots, e_n$ standard bázis, mert abban egyszerű leolvasni a koordinátákat.

Bázis megadása generált altérben

Legyen $U = [v_1, \ldots, v_k]$ altér a V véges dimenziós valós vt.

1. EBT-vel meghatározzuk, hogy (maximálisan) hány darab vektor vonható be a bázisba a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok közül.
2. Bázisba bevont vektorok bázist alkotnak az U altérben, számuk az altér dimenziójával egyezik meg.

VAGY

1. A generátorrendszer vektorait beírjuk az A mátrix soraiba.
2. A sorokon végzett elemi átalakításokkal (!!!) meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
3. A nem csupa 0-t tartalmazó sorvektorok az U altér egy bázisát adják.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)]$. Határozzuk meg U dimenzióját.

0.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
e_1	-5	1^*	1	-1	1
e_2	7	2	8	1	1
e_3	16	1	13	2	-2
e_4	7	2	8	1	1
e_5	1	-1	-7	1	1

1.	u_1	u_3	u_4	u_5
e_2	17	6	3	-1^*
e_3	21	12	3	-3
e_4	17	6	3	-1
e_5	-4	-6	0	2

2.	u_1	u_3	u_4
e_3	-30	-6	-6
e_4	0	0	0
e_5	30	6	6^*

3.	u_1	u_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az u_2, u_4, u_5 vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)]$. Határozzuk meg U dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 16 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 13 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az $(1, 0, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, -1) \in U$ vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Példa.

Az előző példában szereplő vektorokat írjuk be egy mátrix **oszlopaiba**. Határozzuk meg a mátrix rangját, illetve adjunk meg maximális méretű nem nulla aldeterminánst a mátrixban.

Mivel a vektorokat a mátrix oszlopaiba írtuk, így a mátrix a korábbi EBT-táblázat által meghatározott mátrix lesz.

0.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
e_1	-5	1	1	-1	1
e_2	7	2	8	1	1
e_3	16	1	13	2	-2
e_4	7	2	8	1	1
e_5	1	-1	-7	1	1

$\dots$

3.	u_1	u_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Az EBT segítségével a mátrix oszloprangját számoltuk ki, így a rangszámtétel alapján: $r(A) = r_d(A) = r_s(A) = r_o(A) = 3$.

Mivel $r(A) = r_d(A) = 3$, így 3-ad rendű a legnagyobb méretű nem nulla aldetermináns, ami kiválasztható a mátrixból. Az EBT-táblázat azt is megmutatja, hogy mely sorokat és oszlopokat lehet választanunk:

3.	u_1	u_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Mivel az u_2, u_4, u_5 került be a bázisba, ezért a 2., 4., 5. oszlopokat választhatjuk. Továbbá az e_1, e_2, e_5 bázisvektorok helyére vittük be ezeket a vektorokat, így az 1., 2., 5. sorokat tekinthetjük. A kiválasztott sorok és oszlopok által meghatározott aldetermináns maximális méretű nem nulla aldetermináns lesz.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 13 & 2 & -2 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tétel (Lin. függetlenség, generátorr., bázis, rang).

Legyen V n-dimenziós vektortér és $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorrendszer, melynek rangja r. Ekkor a következők érvényesek:

1. $r \leq n, k$;
2. a vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $r = k$;
3. a vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere V-nek, ha $r = n$;
4. a vektorrendszer pontosan akkor bázisa V-nek, ha $r = k = n$.

Példa.

Döntsük el, hogy az ($\mathbb{R}^4$-beli)

$$(1,-1,2,1),(-3,1,0,2),(1,1,-1,2),(-1,1,1,5)$$

vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e $\mathbb{R}^4$-ben.

Az $\mathbb{R}^4$ vektortér dimenziója 4 ($n=4$), a vektorrendszernek 4 eleme van ($k=4$). Ki kellene számolni még a vektorrendszer rangját ($r=3$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja $r = 3$. A vektorrendszer nem lin. fgt., nem generátorr. és nem bázis.

Tétel.

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V vektortérben, amelyekre $U_1 \subseteq U_2$ teljesül. Ekkor

- $\dim(U_1) \leq \dim(U_2)$;
- $U_1 = U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\dim(U_1) = \dim(U_2)$.

Tétel (Alterek dimenziótétele).

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V valós vektortérben. Ekkor

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Tétel (Alterek összegének generátorrendszere).

Ha $U_1 = [u_1, \ldots, u_m]$ és $U_2 = [v_1, \ldots, v_n]$ alterek a V vektortérben, akkor

$$U_1 + U_2 = [u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n].$$

Igaz vagy Hamis?

- Ha egy legalább két elemű linerisan független vektorrendszerből elhagyunk egy tetszőleges vektort, akkor szintén lineárisan független vektorrendszert kapunk.

Igaz, lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere lineárisan független.

- Van olyan $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ mátrix, amelynek 5 a rangja.

Hamis, mivel a mátrixnak 4 oszlopa van, így $4 \geq r_o(A) = r(A)$.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen V valós vektortér, $u, v, w \in V$. Az u, v, w vektorrendszer rangja nem egyenlő az u, v, w, z vektorrendszer rangjával, ha ...

(a) $z = u + v$.

(b) $z = \underline{0}$.

(c) $z \notin [u, v, w]$.

(d) $z = 3w$.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen V valós vektortér, $u, v, w \in V$. Az u, v, w vektorrendszer rangja nem egyenlő az u, v, w, z vektorrendszer rangjával, ha ...

(a) $z = u + v$.

(b) $z = \underline{0}$.

(c) $z \notin [u, v, w]$.

(d) $z = 3w$.

A (c) állítás az igaz.