7. Előadás

$\mathbb{R}^n$

Definíció (Valós szám-n-esek halmaza).

Legyen n természetes szám. A $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám-n-eseknek** nevezzük:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n),$$

ahol $a_1, \dots, a_n$ valós számok; a_i az $\mathbf{a}$ valós szám-n-es i-edik **komponense**.

- $\mathbb{R}^2$ valós számpárok halmaza, pl.: $(1, 2)$, $(3, \sqrt{2})$;
- $\mathbb{R}^3$ valós számhármasok halmaza, pl.: $(-1, 0, 1)$, $(\pi, \sqrt{3}, -\pi)$.

Definíció (Valós szám-n-esek egyenlősége).

Az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ valós szám-n-esek pontosan akkor egyenlők, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Példa.

$$\begin{aligned}(-1, 2) &\neq (-1, 2, 3),\\ (-1, 2, 3.14) &\neq (-1, 2, \pi),\\ (6, 28, 496, 8128) &= (2(2^2 - 1), 2^2(2^3 - 1), 2^4(2^5 - 1), 2^6(2^7 - 1)).\end{aligned}$$

Definíció (Összeadás és szorzás).

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az összeadást, és a valós számokkal történő szorzást a következő módon. Ha $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \overset{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Példa.

$$(1, \sqrt{2} - 1, 3, 0.4) + (2, 1, 0, -1.2) = (3, \sqrt{2}, 3, -0.8),$$

$$0 \cdot (1, -1, \sqrt{2}, \pi) = (0, 0, 0, 0).$$

Definíció (Valós vektortér).

Az így kapott $(\mathbb{R}^n; +, \alpha \cdot (\alpha \in \mathbb{R}))$ struktúrát nevezzük **(valós) vektortérnek**.

Vektortér

Jelölések

- **Vektortér**: V, U, ...; elemei a vektorok (u, v, w, ...).
- **Skalárok**: $\mathbb{R}$ elemei (α, β, γ, ...).

Definíció (Zérusvektor).

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér csupa 0-ból álló vektorát zérusvektornak nevezzük, és $\underline{0}$-val jelöljük; $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$.

Tétel (Vektorterek elemi tulajdonságai).

Legyen V valós vektortér. Ekkor tetszőleges $u, v \in V$ vektorra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

1. $u + v = v + u$ (a vektorok összeadása kommutatív);
2. $\underline{0} + u = u$;
3. $(-1) \cdot u + u = \underline{0}$;
4. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$;
5. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
7. $\alpha \cdot u = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = 0$ vagy $u = \underline{0}$,
   - $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$,
   - $0 \cdot u = \underline{0}$.

Alterek

Definíció (Altér).

A V vektortér U nemüres részhalmaza **altere** V-nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két U-beli vektor összege U-ban van (ha $u, v \in U$, akkor $u + v \in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely U-beli vektort ismét U-beli vektort kapunk (ha $u \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \cdot u \in U$).
Jele: $U \leq V$

Ha $\underline{0} \notin U$, akkor U nem altér.

Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondunk, vonatkozni fog azok altereire is.

Példa.

- Tetszőleges V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek (triviális alterek).
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,3) \in U$, $-1 \in \mathbb{R}$, de $(-1) \cdot (2,3) = (-2,-3) \notin U$ (azaz U nem zárt a skalárokkal való szorzásra).
    - Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor U éppen a pozitív síknegyed.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,4), (-3,-2) \in U$, de $(2,4) + (-3,-2) = (-1,2) \notin U$ (azaz U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

Egy kis geometria: a sík

A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben az alterek a következők:

- a sík maga;
- az origón ($O = (0, 0)$-án) átmenő egyenesek;
- az origót tartalmazó egyelemű halmaz.

A fenti alterekhez intuitív módon hozzá tudunk rendelni nemnegatív egész számokat, a dimenziójukat. Kérdés, hogy ez a dimenzió matematikai fogalom-e.

Alterek megadása

1. Bizonyos vektorokból előállítható vektorok halmaza
$\longrightarrow$ Generált altér, generátorrendszer
Pl.: $\{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

2. Bizonyos tulajdonságú vektorok halmaza
$\longrightarrow$ homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak halmaza
Pl.: $\left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 0,\ 2a - 3c = 0\right\}$

Alterek összege, metszete

Tétel (alterek (komplexus) összege és metszete).

Ha U_1 és U_2 alterei a V vektortérnek, akkor az

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\},$$
$$U_1 \cap U_2 = \{u \in V \mid u \in U_1 \text{ és } u \in U_2\}$$

részhalmazok alterei V-nek.

Definíció ((komplexus) összeg).

Az $U_1 + U_2$ alteret az U_1 és U_2 **alterek (komplexus) összegének** nevezzük.

Lineáris kombináció

Definíció (Lineáris kombináció).

A V vektortér $v_1, \ldots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$$

vektor.

Példa.

A $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ és $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 &= 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1) \\ &= (2, 4, -10),\end{aligned}$$

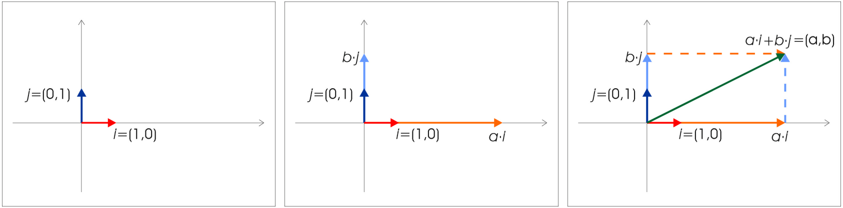
vagyis a $(2, 4, -10)$ vektor előáll az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Észrevétel: Ha U altere a V vektortérnek, akkor tetszőleges $v_1, \ldots, v_n \in U$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is U-beli vektor.

Cél: a vektorterek „mérése”

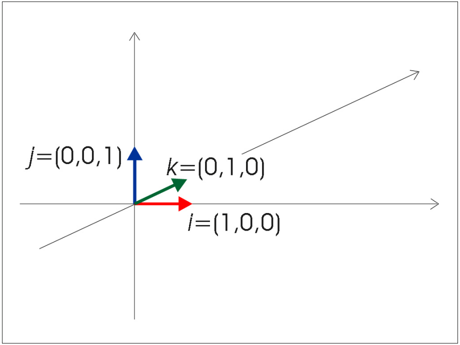
1. Megközelítés

A síkon (az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérben) 2 vektor szükséges és elegendő is ahhoz, hogy ezek lineáris kombinációjaként az összes többi vektort előállítsuk:



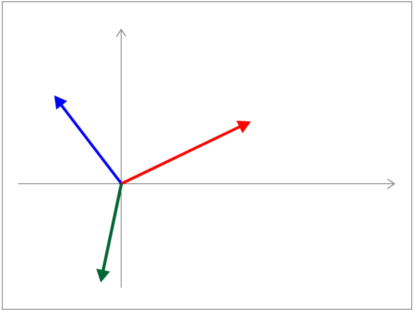
1. Megközelítés

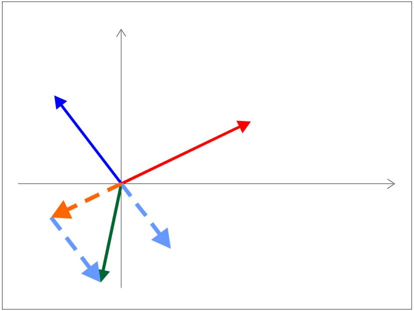
A térben azonban 3 vektor kell ehhez:



2. Megközelítés

A síkon bárhogy adunk meg 3 vektort, azok között lesz olyan, amely a másik kettő által „kifeszített” síknak (vagy egyenesnek) az eleme, míg térben ez nem teljesül. Ezen gondolatmenet precízzé tétele vezet a *lineáris függetlenség* fogalmához.





Generálás, generátorrendszer

Definíció (Generált altér).

Legyen V valós vektortér. A $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorok által **generált altér** a legszűkebb olyan altér, amely tartalmazza a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokat. Jele: $[v_1, \ldots, v_n]$.

Tétel.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok által generát altér elemei éppen a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok összes lineáris kombinációit tartalmazó halmaz, azaz

$$[v_1, \ldots, v_n] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definíció (Generátorrendszer).

A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a V vektortérben, ha

$$V = [v_1, \dots, v_n].$$

Példa.

Legyen $V = \mathbb{R}^4$ és $u = (1, -1, 0, 0)$, $v = (2, 3, 0, 0)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
[u, v] &= \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha, -\alpha, 0, 0) + (2\beta, 3\beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha + 2\beta, -\alpha + 3\beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha, \beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Az u, v vektorrendszer nem generátorrendszer.

Generálás

Példa.

Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 3)$ vektor eleme-e az $V = \mathbb{R}^3$ vektortér $U = [(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ alterének.

Az előző tétel szerint $(2, 0, 3) \in [(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ pontosan akkor teljesül, ha a $(2, 0, 3)$ vektor előáll az $(1, -1, 1), (1, 1, 2)$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis ha vannak olyan α és β skalárok, hogy

$$(2, 0, 3) = \alpha \cdot (1, -1, 1) + \beta \cdot (1, 1, 2),$$

azaz

$$(2, 0, 3) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

A

$$(2,0,3) = (\alpha+\beta, -\alpha+\beta, \alpha+2\beta)$$

vektoregyenlőség pedig azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

0.	α	β	**b**
e_1	1^*	1	2
e_2	-1	1	0
e_3	1	2	3

1.	β	**b**
α	1	2
e_2	2	2
e_3	1^*	1

2.	**b**
α	1
e_2	0
β	1

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt,

$$v = 1 \cdot (1,-1,1) + 1 \cdot (1,1,2).$$

A

$$(2,0,3)=(\alpha+\beta,-\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$$

vektoregyenlőség pedig azt jelenti, hogy

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 2, \\ -\alpha & + & \beta & = & 0, \\ \alpha & + & 2\beta & = & 3. \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt,

$$v = 1 \cdot (1,-1,1) + 1 \cdot (1,1,2).$$

Példa.

Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 3)$ vektor eleme-e az $V = \mathbb{R}^3$ vektortér $U = [u_1, u_2]$ alterének, ahol $u_1 = (1, -1, 1)$ és $u_2 = (1, 1, 2)$.

EBT

0.	u_1	u_2	v
e_1	1	1	2
e_2	−1	1	0
e_3	1	2	3

...

...

2.	**b**
α	1
e_2	0
β	1

GE

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \dots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A táblázat oszlopai éppen a feladatbeli vektorokat tartalmazzák.

Példa.

Igaz-e, hogy a $v = (7, 72, 46, 68) \in \mathbb{R}^4$ vektor eleme az $U = [u_1, \ldots, u_5] \leq \mathbb{R}^4$ altérnek, ahol $u_1 = (0, 8, 9, 6)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 4, 5, 6)$, $u_4 = (1, 8, 4, 8)$, $u_5 = (1, 8, 6, 7)$?

A szükséges lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát (EBT-táblázatát) közvetlenül fel tudjuk írni:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 4 & 8 & 8 & 76 \\ 9 & 2 & 5 & 4 & 6 & 51 \\ 6 & 2 & 6 & 8 & 7 & 74 \end{array}\right) \end{array} \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 19/52 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15/26 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/52 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 29/52 & 7 \end{array}\right)$$

$$v \in U \quad \text{és} \quad v = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 7 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5$$

Definíció (Lineáris függőség).

A V valós vektortérbeli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan függő**, ha van olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely a zérusvektorral egyenlő, azaz vannak olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák, de $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \mathbf{0}$.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(1,1,1),(0,0,0)$

$$0\cdot(1,1,1)+1\cdot(0,0,0)=(0,0,0).$$

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei”).

- Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(3,3,3),(-5,-5,-5)$

$$5\cdot(3,3,3)+3\cdot(-5,-5,-5)=(0,0,0).$$

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei”).

- Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(2, 0, 1, 8), (0, 4, 0, 4), (-6, 16, -3, -8)$

$$(-3) \cdot (2, 0, 1, 8) + 4 \cdot (0, 4, 0, 4) = (-6, 16, -3, -8).$$

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei").

- Ha egy vektorrendszer valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei”).

- Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.
- Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.
- Ha egy vektorrendszer valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Tétel.

Lépcsős alakú mátrix nem-0 soraiból alkotott vektorrendszer nem lineárisan függő.

Definíció (Lineárisan független vektorrendszer).

Legyen V valós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem lineárisan függő.

Azaz,

- ha a $\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$,
- ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\mathbf{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Definíció (Triviális lineáris kombináció).

Legyen V valós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor a

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

lineáris kombinációt, a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok **triviális lineáris kombinációjának** nevezzük.

Példa.

- Az $(1,1,1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha \cdot (1,1,1) = (0,0,0)$, akkor szükségképpen $\alpha = 0$.
- Az $(1,-1,0),(0,1,1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha

$$\underbrace{\alpha \cdot (1,-1,0) + \beta \cdot (0,1,1)}_{(\alpha,-\alpha+\beta,\beta)} = (0,0,0),$$

akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, a harmadik miatt pedig $\beta = 0$.

Példa. (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^2$-ben)

Ha $v_2 \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbb{R}^n$-ben a v_1, v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan α skalár, amelyre $v_1 = \alpha \cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.

Példa. (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^3$-ben)

A térben a v_1, v_2, v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba.

Példa. (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^3$-ben (folyt.))

Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a v_1, v_2, v_3 vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogata kiszámítható a vektorok komponenseiből kialakított (3×3)-as mátrix determinánsának segítségével. Ha $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ és $v_3 = (a_3, b_3, c_3)$ és

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

akkor $V = |D|$ (abszolútérték).
Továbbá, $V \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan független.

Az előzőeket általánosítva kapjuk:

Tétel.

Az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$-es mátrix determinánsa nem 0.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan valós vektortér, amelynek csak egy altere van.

Igaz, csak akkor teljesül, ha a vektrotér $V = \{\underline{0}\}$.

- Léteznek olyan $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vektorok, amelyre $u_1 \neq v_1$, $u_2 \neq v_2$, de $[u_1, u_2] = [v_1, v_2]$.

Igaz, például $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, valamint $v_1 = (-1, -2, 0)$, $v_2 = (3, 6, 0)$ esetén $[u_1, u_2] = [v_1, v_2] = [(1, 2, 0)]$.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen V valós vektortér, ekkor...

(a) tetszőleges $U \subseteq V$ altér esetén létezik $v \in V$, amelyre $[v] = U$.

(b) bármely $u, v \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha u + \beta v \in V$.

(c) vannak olyan $U_1, U_2 \subseteq V$ alterek, amelyekre $\underline{0} \notin U_1 \cap U_2$.

(d) az egyelemű vektorrendszer mindig lineárisan független.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen V valós vektortér, ekkor...

(a) tetszőleges $U \subseteq V$ altér esetén létezik $v \in V$, amelyre $[v] = U$.

(b) bármely $u, v \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha u + \beta v \in V$.

(c) vannak olyan $U_1, U_2 \subseteq V$ alterek, amelyekre $\underline{0} \notin U_1 \cap U_2$.

(d) az egyelemű vektorrendszer mindig lineárisan független.

A (b) állítás az igaz.