

# 6. Előadás

# A Leontief-féle Input/Output modell

## Példa.

Tegyük fel, hogy egy gazdaság 3 fő ágazatból áll: mezőgazdaság, ipar és szállítás. Az egyes ágazatok 1 egységnyi termék előállításához mindhárom ágazat termékeit felhasználják:

	Egységnyi termékre eső felhasználás		
	Mezőgazdaság	Ipar	Szállítás
Mezőgazdaság	0.30	0.30	0.20
Ipar	0.20	0.10	0.20
Szállítás	0.00	0.20	0.20

amelynek oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

## Példa.

A fenti gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{array}{c} M \\ I \\ Sz \end{array} \begin{array}{ccc} M & I & Sz \\ \left( \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{array} \right), \end{array}$$

amelynek oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

## Definíció (ráfordítási mátrix).

Egy gazdaság egyes ágazatai közötti kapcsolatokat leíró mátrixot a gazdaság **ráfordítási mátrixnak** hívjuk. A ráfordítási mátrix oszlopai mutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Row, or column, that is the question.

Amennyiben a sorok mutatják, hogy az egyes ágazatoknak mennyi nyersanyagra van szüksége, akkor **mindent** transzponálni kell.

Mindig tisztában kell lenni azzal,  
hogy sorokban vagy oszlopokban gondolkodunk!

# A ráfordítási mátrix használata

$$\begin{array}{c} M \\ I \\ Sz \end{array} \begin{array}{ccc} M & I & Sz \\ \left( \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{array} \right) \end{array}$$

Ha 1 egységnyi  $M$ , 3 egységnyi  $I$  és 2 egységnyi  $Sz$  terméket szeretnénk legyártani, akkor mennyi termékre van szükség? Például az  $M$  termékből

$$1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 = 1.7$$

egységnyi szükséges, azonban ezen termékeket is elő kell állítani, és ahhoz szintén valamennyi terméket fel kell használni, stb.

# Nettó és bruttó kibocsátás

## Definíció (Nettó kibocsátás).

Az a termékmennyiség, amelyet az adott gazdaságnak elő kell állítania (felfogható megrendelésként).

## Definíció ((Nettó kibocsátáshoz tartozó) bruttó kibocsátás).

Az a termékmennyiség, amelyet a gazdaságnak ÖSSZESEN elő kell állítania ahhoz, hogy a nettó kibocsátást elő tudja állítani.

Hogyan lehet meghatározni a bruttó kibocsátást?

## A Leontief-féle Input/Output modell

Legyen  $G$  olyan gazdaság, amely  $n$  darab ágazatot foglal magában és ráfordításai mátrixa  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ekkor

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{bruttó kibocsátás}} = \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{közbülső kibocsátás}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{nettó kibocsátás}},$$

$$\text{ahol } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

## A Leontief-féle Input/Output modell

Mivel  $\mathbf{x} = E_n \mathbf{x}$ , ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} &\iff E_n \mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} \\ &\iff E_n \mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ &\iff (E_n - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ &\iff \mathbf{x} = (E_n - C)^{-1} \mathbf{d},\end{aligned}$$

ha  $E_n - C$  invertálható.

### Definíció (Leontief-inverz).

Legyen  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tetszőleges mátrix. Az  $E_n - C$  mátrix inverzét, amennyiben létezik, a  $C$  mátrix **Leontief-inverzének** nevezzük.



**Tétel.**

Legyen  $C$  egy gazdaság ráfordítási mátrixa,  $\mathbf{d}$  a nettó kibocsátás vektora. Ha  $C$  és  $\mathbf{d}$  minden komponense nemnegatív, valamint ha a  $C$  mátrixnak létezik a Leontief-inverze, az  $\mathbf{x}$  **bruttó kibocsátás**:

$$\mathbf{x} = (E - C)^{-1}\mathbf{d}$$

(oszlop)vektor minden komponense nemnegatív és  $\mathbf{x}$  az egyetlen megoldása az  $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$  egyenletnek.

	Elérendő kibocsátás	Szükséges termékm.
1. kör	$\mathbf{d}$	$C\mathbf{d}$
2. kör	$C\mathbf{d}$	$C(C\mathbf{d}) = C^2\mathbf{d}$
3. kör	$C^2\mathbf{d}$	$C(C^2\mathbf{d}) = C^3\mathbf{d}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ekkor az  $\mathbf{x}$  bruttó kibocsátás:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + \dots \\ &= (E + C + C^2 + \dots)\mathbf{d}.\end{aligned}$$

Mivel

$$(E - C)(E + C + C^2 + \dots + C^m) = E - C^{m+1},$$

ezért

$$(E - C)^{-1} \approx E + C + \dots + C^{m+1}.$$

Tekintsük a Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}. \text{ Ekkor } C\text{-nek létezik Leontief-inverze}$$

$$(E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 \\ 0.0 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Az  $E + C + \dots + C^m$  ( $m = 1, 2, 4, 8$ ) mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{pmatrix} 1.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 1.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1.45 & 0.46 & 0.36 \\ 0.28 & 1.21 & 0.30 \\ 0.04 & 0.26 & 1.28 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1.57 & 0.60 & 0.51 \\ 0.35 & 1.23 & 0.39 \\ 0.08 & 0.31 & 1.33 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1.61 & 0.66 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.09 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

# Bruttó kibocsátás kiszámítása

Tekintsük a Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \text{ és } (E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Ha 1 egységnyi  $M$ , 3 egységnyi  $I$  és 2 egységnyi  $Sz$  terméket szeretnénk legyártani, akkor a nettó kibocsátás a  $\mathbf{d}^T = (1, 3, 2)$  vektorral adható meg.

Határozzuk meg a bruttó kibocsátást:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (E - C)^{-1} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1.62 + 2.01 + 1.14 \\ 0.38 + 3.99 + 0.86 \\ 0.10 + 0.99 + 2.72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.77 \\ 5.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Működőképes gazdaság

Ha egy „zárt” gazdaság ráfordítási mátrixának Leontief-inverze tartalmaz negatív elemet, akkor a gazdaság nem működőképes: adott termékmennyiség előállításához összességében végtelen sok terméket fogyasztana el.

Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.1 & 0.1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

akkor a gazdaság nem működőképes, hiszen ...

**Példa.**

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a  $\mathbf{d} = (1 \ 1 \ 1)^T$  nettó kibocsátáshoz tartozó összkibocsátást.

A  $C$  mátrix Leontief-inverze:

$$(E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.6 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix}.$$

Így a bruttó kibocsátás vektora:

$$(E - C)^{-1} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.625 \\ 46.875 \\ 46.25 \end{pmatrix} .$$

# Néhány kérdés a ráfordítási mátrixszal kapcsolatban

- Adott termékmennyiség előállításánál mennyi terméket kell legyártani?
- „Működőképes-e” a gazdaság?
- Ha az árak ismertek, hogy lehet meghatározni az egyes ágazatok profitját?
- Milyen árak mellett lehet az összprofitot maximalizálni?
- Milyen egyensúlyi helyzetek vannak a gazdaságnak?



## Példa.

Működőképes-e az a gazdaság, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} ?$$

## Tétel.

Ha a ráfordítási mátrix Leontief-inverze létezik és valamelyik eleme negatív, akkor a gazdaság nem működőképes.

$$(E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -295.71 & -320 & -264.29 \\ -232.86 & -250 & -207.14 \\ -185.71 & -200 & -164.29 \end{pmatrix}$$

**A gazdaság nem működőképes.**

Változtassuk meg egy kicsit a ráfordítási mátrixot és vizsgáljuk, hogy mennyire változik a végeredmény (ez az úgynevezett érzékenység-vizsgálat). Esetünkben a helyzet menthető. Legyen

$$C' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.17391 \end{pmatrix} \quad \left[ C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} \right].$$

Ekkor

$$(E - C')^{-1} = \begin{pmatrix} 597\,519. & 643\,480. & 528\,571. \\ 468\,324. & 504\,350. & 414\,286. \\ 371\,429. & 400\,000. & 328\,571. \end{pmatrix}.$$

# Költség és profit

## Példa.

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix},$$

és legyen az ágazatok termékeinek árvektora

$$\mathbf{v} = (1 \ 2 \ 3)$$

(azaz, az első termék 1 egységbe, a második 2-be, a harmadik pedig 3-ba kerül). Határozzuk meg az egyes ágazatok egységnyi termékének előállításakor keletkező költséget.

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = (1 \ 2 \ 3)$$

Világos, hogy az első, második, illetve harmadik ágazat egységnyi termékének előállításakor rendre

$$1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 = 1.6,$$

$$1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 = 1.7,$$

$$1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 = 1.6$$

egységnyi kiadás keletkezik.

## Tétel.

Ha  $C$  egy gazdaság ráfordítási mátrixa és  $\mathbf{v}$  az árvektor, akkor az egyes ágazatok költségeit a  $\mathbf{v}C$  vektor tartalmazza. A profit(vektor) pedig  $\mathbf{v} - \mathbf{v}C = \mathbf{v}(E - C)$ .

Az előbbi példában a profitvektor:

$$\mathbf{v}(E - C) = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = (-0.6 \quad 0.3 \quad 1.4),$$

ami azt mutatja, hogy a második és harmadik ágazat nyereséges, az első ágazat pedig veszteséges.

**Tétel** (Működőképesség és profitabilitás).

Egy gazdaság pontosan akkor működőképes (vagyis mátrixának Leontief-inverzében nem szerepel negatív szám), ha meg lehet úgy határozni az árakat, hogy semelyik ágazat se legyen veszteséges.

Ha példánkban az árvektort  $\mathbf{v}' = (2 \ 2 \ 3)$ , akkor már nem lesz veszteséges ágazat:

$$\mathbf{v}'(E - C) = (2 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 1.2).$$

A  $C$  mátrix Leontief-inverze:

$$(E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.8 & 1.7 \\ 1.8 & 2.4 & 1.7 \\ 1.7 & 1.7 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

## Az 1.zh mintafeladata

## 7. Feladat

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$ .

- (a) Működőképes-e a gazdaság?
- (b) Adjuk meg a  $(3, 2)^T$  nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.
- (c) Döntsük el, hogy a  $(2, 3)$  árvektor esetén mindkét ágazat nyereséges-e.

- (a) Nem működőképes a gazdaság, ha az  $A$  mátrix Leontief-inverzében található negatív szám. Meghatározzuk a Leontief-inverzet:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1}$$

## Leontief-inverz kiszámítása

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1}$$

- 1. módszer: EBT

$$\begin{array}{c|cc} 0. & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & 1/2 & -1/8 \\ e_2 & -1^* & 3/4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} 1. & e_2 & v_2 \\ \hline e_1 & 1/2 & 1/4^* \\ v_1 & -1 & -3/4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} 2. & e_2 & e_1 \\ \hline v_2 & 2 & 4 \\ v_1 & 1/2 & 3 \end{array}$$

Sor- és oszlopkerék után:  $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

**Ellenőrizünk!!!**  $(E - A)(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = E$



## Működőképesség

- 2. módszer: Adjungáltak

(2 × 2)-es mátrix esetén

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Ellenőrizzünk!!!}$$

Mivel a Leontief-inverz nem tartalmaz negatív számot, a gazdaság működőképes.

## Bruttó kibocsátás

(b) Adjuk meg a  $(3, 2)^T$  nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.

Mivel  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  a nettó kibocsátás, így a bruttó kibocsátás:

$$\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Tehát ahhoz, hogy az első ágazat 3, a második 2 terméket kibocsátson, összesen 10 illetve 16 terméket kell előállítani.

## Nyereség

(c) Döntsük el, hogy a  $(2, 3)$  árvektor esetén mindkét ágazat nyereséges-e.

Ha  $\mathbf{v} = (2, 3)$  az árvektor, az egyes ágazatok költségeit a  $\mathbf{v}A$  vektor tartalmazza, így a profitvektor:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}A = \mathbf{v}(E - A) = (2 \ 3) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} = (-2 \ 2).$$

(**Figyelem:** nem a Leontief-inverzszel, hanem az  $(E - A)$ -val szorzunk!!!)

Tehát az első ágazat veszteséges, a második nyereséges.

# Igaz vagy Hamis?

- Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixának Leontief-inverzében nagy pozitív számok szerepelnek, akkor a gazdaság nem működőképes.

**Hamis**, ha nem szerepel negatív szám a Leontief-inverzben, pontosan akkor működőképes a gazdaság. Az igaz, hogy a nagy pozitív számok azt mutatják, hogy nem működik jól a gazdaság.

- Az árvektort mindig meg lehet úgy adni, hogy egyik ágazat se legyen veszteséges.

**Hamis**, csak működőképes gazdaság esetén igaz.

# Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Egy gazdaság ráfordítási mátrixát jelölje  $C$ , ekkor...

- (a) a  $C$  Leontief-inverze mindig létezik.
- (b) ha létezik a  $C$  Leontief-inverze, akkor és csakis akkor működőképes a gazdaság.
- (c) ha  $\mathbf{v}$  az árvektor, akkor a profit:  $\mathbf{v}(E - C)^{-1}$ .
- (d) működőképes gazdaság esetén a bruttó kibocsátás egyik ágazatban sem lehet kisebb, mint a nettó kibocsátás.

# Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Egy gazdaság ráfordítási mátrixát jelölje  $C$ , ekkor...

- (a) a  $C$  Leontief-inverze mindig létezik.
- (b) ha létezik a  $C$  Leontief-inverze, akkor és csakis akkor működőképes a gazdaság.
- (c) ha  $\mathbf{v}$  az árvektor, akkor a profit:  $\mathbf{v}(E - C)^{-1}$ .
- (d) működőképes gazdaság esetén a bruttó kibocsátás egyik ágazatban sem lehet kisebb, mint a nettó kibocsátás.

A (d) állítás az igaz.