

5. Előadás

Mátrixegyenletek

Mátrixegyenletek

Probléma.

Legyen A ($m \times n$)-es és B ($m \times \ell$)-es mátrix. Található-e olyan X mátrix, amelyre $AX = B$?

Megjegyzések. (a) Ha létezik a fenti tulajdonságú X mátrix, akkor $X \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$.

(b) Az

$$A \cdot \left(\begin{array}{c} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} x_{1l} \\ \vdots \\ x_{nl} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{array} \right)$$

mátrixegyenlet ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszer rendszerrel:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A \cdot \begin{pmatrix} x_{1l} \\ \vdots \\ x_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{pmatrix}.$$

Az egyes egyenletrendszerek elemi bázistranszformációval megoldhatók, ügyesen szervezve a teendőket, akár egyszerre is.

Mátrixegyenletek

Az elemi bázistranszformációt az alábbi táblázatra fogjuk végrehajtani:

0.	x_1	...	x_n	b_1	...	b_ℓ
e_1	a_{11}	...	a_{1n}	b_{11}	...	$b_{1\ell}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
e_m	a_{m1}	...	a_{mn}	b_{m1}	...	$b_{m\ell}$

Szabályok:

- az „ e ”-ket szeretnénk lecserélni „ x ”-ekre, így
- a generáló elem csak az a_{ij} -k közül kerülhet ki.

Példa.

Oldjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenletet.

Ha X megoldása a mátrixegyenletnek, akkor $X \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Az EBT-hez szükséges táblázat az alábbi lesz:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
e_1	1	-1	2	1	-1	1	0
e_2	1	0	1	-1	1	2	1

$$\begin{array}{c|cccc|ccc}
 0. & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\
 \hline
 e_1 & 1^* & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 e_2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 1. & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\
 \hline
 \mathbf{x}_1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 e_2 & 1^* & -1 & -2 & 2 & 1 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|ccc}
 2. & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\
 \hline
 \mathbf{x}_1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\
 \mathbf{x}_2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 1
 \end{array}$$

A cserét teljesen végrehajtottuk, a mátrixegyenlet megoldható.

2.	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	1	-1	1	2	1
x_2	-1	-2	2	1	1

Az utolsó táblázatból a megoldásokat is leolvashatjuk. Legyen $X = (x_{ij})_{4 \times 3}$. Ekkor x_{1j} és x_{2j} „kötött változók” lesznek, az x_{3j} és x_{4j} ($1 \leq j \leq 3$) változók pedig „szabadok”:

$$x_{11} = 1 - x_{31} + x_{41},$$

$$x_{21} = 2 + x_{31} + 2x_{41},$$

$$x_{12} = 2 - x_{32} + x_{42},$$

$$x_{22} = 1 + x_{32} + 2x_{42},$$

$$x_{13} = 1 - x_{33} + x_{43},$$

$$x_{23} = 1 + x_{33} + 2x_{43}.$$

2.	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	1	-1	1	2	1
x_2	-1	-2	2	1	1

A mátrixegyenlet általános megoldása:

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 1 \cdot x_{31} - (-1) \cdot x_{41} & 2 - x_{32} + x_{42} & 1 - x_{33} + x_{43} \\ 2 - (-1) \cdot x_{31} - (-2) \cdot x_{41} & 1 + x_{32} + 2x_{42} & 1 + x_{33} + x_{43} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix},$$

ahol $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ tetszőleges valós számok.

Tegyük fel, hogy az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldható
 ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$).

0.	x_1	...	x_n	b_1	...	b_ℓ
e_1	a_{11}	...	a_{1n}	b_{11}	...	$b_{1\ell}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
e_m	a_{m1}	...	a_{mn}	b_{m1}	...	$b_{m\ell}$
\vdots						

$w.$	$x_{j_{s+1}}$...	x_{j_n}	b_1	...	b_ℓ
x_{i_1}	$a'_{i_1 j_{s+1}}$...	$a'_{i_1 j_n}$	$b'_{i_1 1}$...	$b'_{i_1 \ell}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
x_{i_s}	$a'_{i_s j_{s+1}}$...	$a'_{i_s j_n}$	$b'_{i_s 1}$...	$b'_{i_s \ell}$
$e_{i_{s+1}}$	0	...	0	0	...	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
e_{i_m}	0	...	0	0	...	0

Megjegyzések.

- Az x_i változó az X megoldásmátrix x_{ij} változóit „jelképezi”.
- A változók értékét úgy határozhatjuk meg, mint az egyenletrendszer megoldása esetén. Tehát a példában az x_3 és x_4 „szabad változók” lesznek, így X minden oszlopának harmadik és negyedik eleme szabadon választható.
- A konstansok meghatározásakor a megfelelő oszlop konstansait a jobboldali konstansok megfelelő oszlopa határozza meg, például a második oszlophoz csak a második oszlopot kell figyelembe venni.

Nincs megoldás

A mátrixegyenletnek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van **ellentmondó sor**, ami a következő alakú lehet:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & x_{j_1} & \dots & x_{j_k} & b_1 & \dots & b_\ell \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 e_j & 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_\ell \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot
 \end{array},$$

ahol a c -k közül legalább egy nem nulla, VAGY

$$\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & \dots & b_\ell \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 e_i & c_1 & \dots & c_\ell \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot
 \end{array},$$

ahol a c -k közül legalább egy nem nulla. Azaz a változók oszlopai már „elfogytak”, de maradt e_i sorában nem nulla.

Pontosan egy megoldás

Ha a mátrixegyenlet megoldása során a következő táblázatot kapjuk:

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} \\ \hline \mathbf{x_1} & 1 & 2 & 2 \\ \mathbf{x_3} & 2 & -1 & 3 \\ \mathbf{x_2} & 1 & -1 & -1 \end{array},$$

akkor nincs szabad ismeretlen (és nincs ellentmondó sor), így pontosan egy megoldás van. A megoldás leolvasásakor ügyeljünk, hogy a sorokat megfelelő sorrendben írjuk, azaz ebben az esetben:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Előállhat-e a következő táblázat egy mátrixegyenlet megoldása során?

	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2	\mathbf{b}_3
\mathbf{x}_1	2	2	-1
\mathbf{x}_2	2	0	3
\mathbf{e}_3	0	0	0

Igen, ha az A mátrix (3×2) , a B pedig (3×3) méretű, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnél az X mátrix, ha létezik, (2×3) típusú.

Hány megoldás van?

Az \mathbf{e}_3 sorában minden elem nulla, így nincs ellentmondó sor. Mivel nincs szabad ismeretlen, pontosan egy megoldás van:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az $XA = B$ alakú egyenletek megoldásáról

$$XA = B \quad \overset{T}{\iff} \quad A^T X^T = B^T$$

Azaz,

- 1 először oldjuk meg az $A^T Y = B^T$ mátrixegyenletet,
- 2 ha Y megoldása, akkor az eredeti egyenlet megoldása $X = Y^T$ lesz.

Példa.

Oldjuk meg az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet ($X \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$).

Tranzponáljuk az egyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

0.	y_1	y_2	y_3	y_4	b_1	b_2	b_3
e_1	1*	1	2	4	9	7	8
e_2	0	2	1	3	7	7	4
e_3	1	1	1	3	6	6	6
e_4	1	-1	1	1	2	0	4

1.	y_2	y_3	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	1	2	4	9	7	8
e_2	2	1*	3	7	7	4
e_3	0	-1	-1	-3	-1	-2
e_4	-2	-1	-3	-7	-7	-4

2.	y_2	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	-3	-2	-5	-7	0
y_3	2	3	7	7	4
e_3	2*	2	4	6	2
e_4	0	0	0	0	0

3.	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	1	1	2	3
y_3	1	3	1	2
y_2	1	2	3	1
e_4	0	0	0	0

Megjegyzés.

- Nem sikerült minden „e”-t „y”-ra cserélni, de a megmaradt „e”-k sorában minden elem 0, tehát nincs ellentmondó sor. Ekkor a megoldás a korábbi módon olvasható le.

2.	y_2	y_4	b_1	b_2	b_3	3.	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	-3	-2	-5	-7	0	y_1	1	1	2	3
y_3	2	3	7	7	4	y_3	1	3	1	2
e_3	2*	2	4	6	2	y_2	1	2	3	1
e_4	0	0	0	0	0	e_4	0	0	0	0

A transzponált mátrixegyenlet megoldás a következő:

$$y_{11} = 1 - y_{41}, \quad y_{21} = 2 - y_{41}, \quad y_{31} = 3 - y_{41},$$

$$y_{12} = 2 - y_{42}, \quad y_{22} = 3 - y_{42}, \quad y_{32} = 1 - y_{42},$$

$$y_{13} = 3 - y_{43}, \quad y_{23} = 1 - y_{43}, \quad y_{33} = 2 - y_{43},$$

ahol y_{4j} ($j = 1, 2, 3$) tetszőlegesen választható, azaz

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{42} & 3 - y_{43} \\ 2 - y_{41} & 3 - y_{42} & 1 - y_{43} \\ 3 - y_{41} & 1 - y_{42} & 2 - y_{43} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{pmatrix}.$$

Az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet megoldása pedig

$$X = Y^T = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{41} & 3 - y_{41} & y_{41} \\ 2 - y_{42} & 3 - y_{42} & 1 - y_{42} & y_{42} \\ 3 - y_{43} & 1 - y_{43} & 2 - y_{43} & y_{43} \end{pmatrix},$$

ahol y_{4j} ($j = 1, 2, 3$) tetszőleges valós számok.

Mátrix inverze

Definíció (Mátrix inverze).

Legyen A négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **inverze** A -nak, ha

$$AB = BA = E_n.$$

Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az A mátrixnak inverze a B mátrix, akkor

$$1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$$

következtében $|A| \neq 0$.

Ha az A mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **nemelfajulónak** nevezzük.

Ha az A mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az A **invertálható**.

Tétel.

Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánása nem 0.

Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Jelölés: A^{-1} az A mátrix inverze (ha az létezik).

Tétel.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánása.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 17 \\ 19 & 23 & 29 \\ 31 & 37 & 41 \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = -40 \neq 0$ következtében A invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 23 & 29 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 19 & 29 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 23 & 29 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 19 & 29 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 19 & 23 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} -130 & 96 & -14 \\ 120 & -76 & 4 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{12}{5} & \frac{7}{20} \\ -3 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

Inverz számítása

Ha az A ($n \times n$)-es mátrix invertálható, akkor A^{-1} az $AX = E_n$ mátrixegyenlet (egyetlen) megoldása.

Azaz a mátrixegyenletre tanult módszer segítségével kiszámítható a mátrix inverze.

Az A ($n \times n$)-es mátrix pontosan akkor nem invertálható, ha ellentmondó sort kapunk az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldása során.

Az $AX = E_n$ egy speciális mátrixegyenlet, így a korábbi elemi bázistranszformációs lépések kis módosításával egyszerűbben is meg lehet oldani (ld. következő diák).

Inverz számítása elemi bázistranszformációval

- 1 A mátrix elemeit táblázatba foglaljuk, a sorokat az e_1, e_2, \dots , az oszlopokat pedig a v_1, v_2, \dots szimbólumokkal címkézzük.
- 2 Generálóelemet választunk ($a_{ij} \neq 0$), majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre:
 - **most nem hagyunk el oszlopot** (ld. Új szabályok!),
 - az a_{ij} elem sor- és oszlopcímkei felcserélődnek,
 - mindig e -t cserélünk v -re.
- 3 Addig ismételjük a 2. lépést, amíg alkalmas generáló elemet tudunk választani.
- 4 Ha az „ e ”-k és a „ v ”-k helyet cseréltek, akkor a mátrixnak van inverze, a sorokat és az oszlopokat a címkék eredeti sorrendjének megfelelően átrendezve az inverz is látható.
- 5 Ha még azelőtt elakadunk, hogy az e -k és a v -k helyet cseréltek volna, akkor a mátrixnak nincs inverze.

Új szabályok!

A generáló elem oszlopát nem hagytuk el, az új táblázatba a következő elem kerülnek ebbe az oszlopba:

- A generáló elem helyébe annak reciproka kerül: $a'_{ij} = 1/a_{ij}$.
- A generáló elem oszlopának többi elemét osztjuk a generáló elem (-1) -szeresével: $a'_{i'j} = a_{i',k}/(-a_{ij})$ ($i' \neq i$).

Példa.

Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1*	2	0	1
e_2	2	1	2	-1
e_3	0	2	1	2
e_4	-1	0	2	1

 \rightsquigarrow

1.	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	-2	-3	2	-3
e_3	0	2	1*	2
e_4	1	2	2	2

2.	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	-2	-7	-2	-7
v_3	0	2	1	2
e_4	1	-2	-2	-2*

 \rightsquigarrow

3.	e_1	v_2	e_3	e_4
v_1	3/2	1	-1	1/2
e_2	-11/2	0	5	-7/2
v_3	1	0	-1	1
v_4	-1/2	1	1	-1/2

Elakadtunk, így az A mátrixnak nincs inverze.

Példa.

Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4		1.	v_1	e_1	v_3	v_4
e_1	2	1^*	0	1		v_2	2	1	0	0
e_2	1	2	1	0	\rightsquigarrow	e_2	-3	-2	1^*	0
e_3	0	1	2	1		e_3	-2	-1	2	1
e_4	0	0	1	2		e_4	0	0	1	2

2.	v_1	e_1	e_2	v_4		3.	v_1	e_1	e_2	e_3
v_2	2	1	0	0		v_2	2	1	0	0
v_3	-3	-2	1	0	\rightsquigarrow	v_3	-3	-2	1	0
e_3	4	3	-2	1^*		v_4	4	3	-2	1
e_4	3	2	-1	2		e_4	-5 [*]	-4	3	-2

$$\begin{array}{c|cccc}
 3. & v_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\
 \hline
 v_2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 v_3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
 v_4 & 4 & 3 & -2 & 1 \\
 e_4 & -5^* & -4 & 3 & -2
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{c|cccc}
 4. & e_4 & e_1 & e_2 & e_3 \\
 \hline
 v_2 & 2/5 & -3/5 & -6/5 & -4/5 \\
 v_3 & -3/5 & 2/5 & -4/5 & 6/5 \\
 v_4 & 4/5 & -1/5 & 2/5 & -3/5 \\
 v_1 & -1/5 & 4/5 & -3/5 & 2/5
 \end{array}$$

Minden „e”-t ki tudtunk cserélni „v”-re, ezért A -nak van inverze, a címkék sorrendjét visszaállítva azt kapjuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Azonosságok

Tétel (Az invertálás azonosságai).

Legyen A és B tetszőleges $(n \times n)$ -es invertálható mátrix, ekkor

- 1 $(A^{-1})^{-1} = A$,
- 2 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definíció (Négyzetes mátrix negatív kitevős hatvány).

Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív kitevős hatványai:

$$A^{-k} = (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Azonosságok

Definíció.

Az A ($n \times n$)-es mátrix esetén $A^0 = E_n$.

Tétel (A hatványozás azonosságai).

Legyen A tetszőlegesen invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor

- 1 $A^{m+k} = A^m A^k$,
- 2 $(A^m)^k = A^{mk}$.

1. módszer (merészeknek/számítógépeknek)

Tétel.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungáltja.

2. módszer (bátraknak)

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és

$$(A|E_n) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

- Ha $(A|E_n) \sim (E_n|B)$, akkor A invertálható és $B = A^{-1}$.
- Ha $(A|E_n) \not\sim (E_n|\star)$, akkor A nem invertálható.

2. módszer (bátraknak)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sorokon végzett elemi átalakítások
 $\sim \dots \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 46 & -33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 24 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 46 & -33 & 7 \\ -33 & 24 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. módszer (bátraknak)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -16 \end{pmatrix}$$

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -16 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sorokon végzett elemi átalakítások
 $\sim \dots \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right)$$

Az A mátrix nem invertálható (vö.: $|A| = 0$).

3. módszer

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Ha az EBT pontosan n lépés után ér véget:

$$\begin{array}{c|ccc}
 0. & \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \\
 \hline
 \mathbf{e}_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{e}_n & a_{n1} & \dots & a_{nn}
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 n. & \mathbf{e}_{j_1} & \dots & \mathbf{e}_{j_n} \\
 \hline
 \mathbf{a}_{i_1} & a'_{i_1 j_1} & \dots & a'_{i_1 j_n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{a}_{i_n} & a'_{i_n j_1} & \dots & a'_{i_n j_n}
 \end{array},$$

akkor az A mátrix invertálható, inverze $(a'_{ij})_{n \times n}$. Különben nem invertálható.

Igaz vagy Hamis?

- Ha egy mátrixegyenlet megoldása során egy $x_2 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ -2 \ 0$ sort kapunk, akkor a mátrixegyenletnek nincs megoldása.

Hamis, akkor lenne ellentmondó sor, ha e_i szerepelne az elején.

- Vannak olyan A és B ($n \times n$)-es invertálható mátrixok, amelyekre $(AB)^k \neq A^k B^k$, valamely $k \in \mathbb{Z}$ -re.

Igaz, mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, és invertálható mátrixok is találhatóak, amelyekre $AB \neq BA$, pl: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $k = 2$ esetén, $ABAB \neq AABB$.

Feleletválasztás

A négy válasz közül pontosan egy helyes.

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix esetén melyik állítás NEM igaz?

- (a) $|A| \neq 0$.
- (b) AB is invertálható tetszőleges $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén.
- (c) Az $AX = B$ bármely $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén megoldható.
- (d) Az A^T nemelfajuló.

Feleletválasztás

A négy válasz közül pontosan egy helyes.

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix esetén melyik állítás NEM igaz?

- (a) $|A| \neq 0$.
- (b) AB is invertálható tetszőleges $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén.
- (c) Az $AX = B$ bármely $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén megoldható.
- (d) Az A^T nemelfajuló.

A (b) állítás. Mivel $|AB| = |A||B|$, így ha $|B| = 0$, akkor AB nem invertálható.