4. Előadás

Elemi átalakítások (ismétlés)

Definíció (Mátrixok elemi átalakításai (ismétlés)).

Mátrixok elemi átalakításai a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

Lépcsős alakú mátrixok (ismétlés)

Definíció (Lépcsős alakú mátrixok).

Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor lépcsős alakú. Tegyük fel, hogy a nem a zérusmátrix. Ekkor A lépcsős alakú, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{\mathbf{i_1 j_1}} = a_{\mathbf{i_2 j_2}} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb'' van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

Gauss-elimináció (ismétlés)

Tétel.
Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Mátrixok lépcsős alakja nem egyértelmű.

Lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

- a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk (pl. Gauss-eliminációval),
- a lépcsős alak ismeretében eldöntjük, hogy van-e megoldás (ld. következő tétel),
- ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakból.

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora ellentmondó, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tétel (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

Ha a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja nem tartalmaz ellentmondó sort, akkor van megoldása az egyenletrendszernek. Ha a bővített mátrix vezéregyesei rendre a $j_1 < \cdots < j_r$ oszlopokban vannak, akkor az $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ ismeretlenek lesznek kötöttek, a többi ismeretlen pedig szabad. Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{1(j_1+1)} & \ldots & & \ldots & a'_{1m} & b'_1 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & & \\
0 & \ldots & & & 0 & 1 & a'_{r(j_r+1)} & \ldots & a'_{rm} & b'_r \\
0 & \ldots & & & & & & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots
\end{array}\right),$$

akkor …

Tétel (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

... Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & \dots & 0 & \color{red}{1} & a'_{1(j_1+1)} & \dots & & & & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & & & & \\
0 & \dots & & & & & 0 & \color{red}{1} & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots
\end{array}\right),$$

akkor

$$\begin{aligned}
x_{j_1} &= b'_1 - a'_{1(j_1+1)} x_{j_1+1} - \dots - a'_{1m} x_m, \\
&\vdots \\
x_{j_r} &= b'_1 - a'_{r(j_1+1)} x_{j_1+1} - \dots - a'_{rm} x_m.
\end{aligned}$$

Ne felejtsük el, hogy a vezéregyesek felett 0-ák állnak!

Példa.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol λ valós paraméter.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda. \end{array}\right.$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array}\right).$$

- Ha $\lambda \neq 5$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, mivel van ellentmondó sor.

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{array}\right).$$

- Ha $\lambda = 5$, akkor van megoldás. Két kötött (x_1, x_2) és két szabad (x_3, x_4) ismeretlen van. Az általános megoldás:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \qquad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

valós számnégyesként pedig: $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4\right)$, ahol x_3 és x_4 tetszőleges valós számok.

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2, \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda. \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy általános megoldása:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4\right) \qquad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldását úgy kapjuk meg, hogy a szabad változóknak (konkrét) értéket adunk. Legyen $x_3 = 9$ és $x_4 = 25$, ekkor $x_1 = -31$ és $x_2 = -29$, a konkrét megoldás:

$$(-31, -29, 9, 25).$$

A megoldások száma

Tétel.

Az

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása, ha bővített mátrixának lécsős alakjában van ellentmondó sor,
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad változója,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad változója.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó (x_2).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

Elemi Bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 -{}} {\color{red}x_2} - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_2-t: $x_2 = x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ \color{red}{x_1} & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki a harmadik egyenletből x_1-et: $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_3 & - & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 4, \\ 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_3-at: $x_3 = 2 - \frac{3}{2}x_4 + 2x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\left\{ \; -\frac{1}{2}x_4 \quad = \quad -6. \right.$$

Az egyenletrendszer meg is oldódott:

$$\begin{aligned} x_4 &= 12, \\ x_3 &= 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 = 20 + 2x_5, \\ x_1 &= -2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 + 3x_5, \\ x_2 &= x_4 + x_5 = 12 + x_5, \end{aligned}$$

ahol x_5 tetszőleges valós szám.

A végrehajtott eljárás több előnnyel is bír:

- meglehetősen természetes módja az egyenletrendszer megoldásának,
- tömör és jól áttekinthető formában is végrehajtható.

Az eljárás neve: Elemi Bázistranszformáció, amelynek során az új egyenletrendszer együtthatóit fogjuk ügyesen számolni.

Foglaljuk táblázatba az

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

egyenletrendszer együtthatóit:

	x_1	$\dots$	x_m	$\mathbf{b}$
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nm}	b_n

0.	x_1	$\ldots$	x_m	$\mathbf{b}$
e_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\ldots$	a_{nm}	b_n

Az alábbi lépéseket hajtsuk végre:

- a generáló elem választása: az együtthatók együtthatók közül választunk egy 0-tól különbözőt (pl.: a_{ij}-t, ami annak felel meg, hogy az i-edik egyenletből fejezzük ki x_j-t), a generáló elemet $*$-gal megjelöljük (a_{ij}^*),
- az x_j-hez tartozó oszlopot töröljük és a következő átalakításokat hajtjuk végre:
  - e_i helyébe x_j kerül,
  - az i-edik sor minden elemét osztjuk a_{ij}-vel,
  - az új táblázat többi elemét pedig a Téglalap-szabállyal számítjuk ki ($\mathbf{b}$ oszlopában is).

Téglalap-szabály

A téglalap-szabály segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem a generáló elemmel együtt egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	b	.	d	.
e_2	.	.	.	.
e_3	a^*	.	c	.

Ebben az esetben az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

Elemi bázistranszformáció: $a^*_{ij} \neq 0$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
k. & \dots & x_v & \dots & x_j & \dots & \mathbf{b} \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_u & \dots & a_{uv} & \dots & a_{uj} & \dots & b_u \\
\vdots & & \vdots & \boxed{} & \vdots & & \vdots \\
e_i & \dots & a_{iv} & \dots & a^*_{ij} & \dots & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$a'_{iv} = a_{iv}/a^*_{ij}, \qquad b'_i = b_i/a^*_{ij}$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}} = \frac{a_{uv}a^*_{ij} - a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i,$$

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a^*_{ij}} = \frac{b_u a^*_{ij} - a_{uj}b_i}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i.$$

Az új táblázat:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
(k+1). & \dots & x_v & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & \mathbf{b} \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_u & \dots & a'_{uv} & \dots & a'_{u(j-1)} & a'_{u(j+1)} & \dots & b'_u \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_j & \dots & a'_{iv} & \dots & a'_{i(j-1)} & a'_{i(j+1)} & \dots & b'_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$a'_{iv} = a_{iv}/a^*_{ij}, \qquad b'_i = b_i/a^*_{ij}$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}} = \frac{a_{uv}a^*_{ij} - a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i,$$

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a^*_{ij}} = \frac{b_u a^*_{ij} - a_{uj}b_i}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i.$$

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ \quad\;\; 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
e_1	0	1	0	−1	−1	0
e_2	2	0	0	−5	−6	0
e_3	0	0	3	−5	−6	0
e_4	1	−1	−1	0	0	−2

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \quad \color{red}{x_2} - \quad\quad\quad x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - \quad\quad\quad\quad\quad 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad = -2. \end{cases}$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
e_1	0	1^*	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

Példa.

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	0	-1	-1	0
e_2	2	0	-5	-6	0
e_3	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	-1	-2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

Példa.

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
x_2	0	0	−1	−1	0
e_2	2	0	−5	−6	0
e_3	0	3	−5	−6	0
e_4	1^*	−1	−1	−1	−2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & & & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ {\color{red}x_1} & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{array}\right.$$

Példa.

2.	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa.

2.	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2^*	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa.

3.	x_4	x_5	**b**
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\left\{ \; -1/2x_4 \quad = \quad -6, \right.$$

Példa.

3.	x_4	x_5	**b**
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2^*$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\left\{ \; {\color{red}-1/2x_4} \quad = \quad -6, \right.$$

Példa.

4.	x_5	**b**
x_2	-1	12
x_3	-2	20
x_4	0	12
x_1	-3	30

$$x_1 = 30 + x_5, \quad x_2 = 12 + x_5, \quad x_3 = 20 + 2x_5, \quad x_4 = 12,$$

az x_5 ismeretlen értéke tetszőlegesen megválasztható. Figyeljünk az előjelváltásra!

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van ellentmondó sor, ami a következő alakú:

	x_{j_1}	$\dots$	x_{j_k}	$\mathbf{b}$
.	.	$\dots$	.	.
e_i	0	$\dots$	0	$c \neq 0$
.	.	$\dots$	.	.

Fontos: az ellentmondó sor elején e_i-nek kell szerepelnie!!!

Gauss-elimináció vs Elemi bázistranszformáció

Határozzuk meg a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{array}\right.$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

A két módszer (GE és EBT) lényegében ugyanaz, de mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

Előny:

- Nincs vezéregyes!? Akkor csinálunk!

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

Előny:

- a generáló elem tetszőleges 0-tól különböző elem lehet, nem szükséges az első lépésben az első oszloppal dolgozni.
- lehetőségünk van a kötött változók „befolyásolására”.

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Gauss-eliminációval.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array}\right) \underset{\sim}{(-2)\cdot[1.]+[2.]} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{(-23)\times[1.]+[2.],\ (-41)\times[1.]+[3.]} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array}\right)$$

$$\ldots$$

$$\underset{\sim}{(-23)\times[1.]+[2.],\ (-41)\times[1.]+[3.]} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{(-2)\times[2.]+[3.]} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -40 & 100 & 60 & 716 \\ 0 & 0 & -30 & -26 & -153 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{[2.]\cdot(-1/40),\ [3.]\cdot(1/30)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & -179/10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array}\right)$$

$$\overset{\cdots}{\sim} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -103/20 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array}\right)$$

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & + & 19x_4 & = & 17, \\ 23x_1 & + & 29x_2 & + & 31x_2 & + & 37x_3 & = & 3, \\ 41x_1 & + & 43x_2 & + & 47x_3 & + & 53x_4 & = & 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Elemi bázistranszformációval.

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
e_1	11*	13	17	19	17
e_2	23	29	31	37	3
e_3	41	43	47	53	8

1.	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	$13/11$	$17/11$	$19/11$	$17/11$
e_2	$20/11^*$	$-50/11$	$-30/11$	$-358/11$
e_3	$-60/11$	$-180/11$	$-196/11$	$-609/11$

2.	x_3	x_4	**b**
x_1	$9/2$	$7/2$	$227/10$
x_2	$-5/2$	$-3/2$	$-179/10$
e_3	-30	-26^*	-153

3.	x_3	**b**
x_1	$6/13$	$547/260$
x_2	$-10/13$	$-2359/260$
x_4	$15/13$	$153/26$

Igaz vagy Hamis?

- Ha egy lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának lécsős alakjában pontosan annyi nemnulla sor szerepel, mint ahány változó van az egyenletrendszerben, akkor nem lehet végtelen sok megoldás.

Igaz. Lehet benne ellentmondó sor, és akkor nincs megoldás. Ha nincs ellentmondó sor, akkor minden nemnulla sor meghatároz egy-egy változót, tehát minden változó kötött, nem lehet végtelen sok megoldás.

- Ha az elemi bázistranszformáció során már nem tudunk generáló elemet választani, de maradt x_j és e_i úgy, hogy x_j nem került az e_i helyébe, akkor a lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása.

Hamis, pl:

	x_2	$\mathbf{b}$
e_1	0	0
x_1	1	5

esetén nincs ellentmondás, x_2 szabad változó, végtelen sok megoldás van.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris egyenletrendszer m változótót tartalmaz és n egyenletből áll, és...

(a) $n > m$, akkor mindig van megoldása.

(b) $n = m$, akkor pontosan egy megoldása van.

(c) $n < m$, akkor nem lehet pontosan egy megoldása.

(d) $n > m$, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha egy lineáris egyenletrendszer m változtót tartalmaz és n egyenletből áll, és. . .

(a) $n > m$, akkor mindig van megoldása.

(b) $n = m$, akkor pontosan egy megoldása van.

(c) $n < m$, akkor nem lehet pontosan egy megoldása.

(d) $n > m$, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

A (c) állítás az igaz. Ha $n < m$, nem lehet minden változó kötött, mert a lépcsős alakú mátrix sorainak száma kevesebb, mint a változók száma.