3. Előadás

Lineáris egyenletrendszerek

Tekintsük a következő egyszerű kereslet-kínálati problémát: valaki túrógombócot szeretne árulni. Piackutatás alapján tudjuk, hogy a túrógombócok iránti kereslet lineárisan függ a túrógombócok árától, mégpedig a

$$Q = 15 - 2P$$

összefüggés szerint. Ugyanakkor minél alacsonyabb az ár, emberünk annál kevesebb túrógombócot hajlandó gyártani, a

$$Q = 5 + 3P$$

összefüggés szerint. Mi lesz a túrógombóc ára? Az ár a kereslet-kínálat törvénye szerint annyi lesz, ami mellett a kereslet és a kínálat egyensúlyba kerül, vagyis amelyre

$$\begin{array}{ccccc} Q & = & 15 & - & 2P \\ Q & = & 5 & + & 3P \end{array}$$

egyszerre teljesül.

Tegyük fel most, hogy újabb változókat vezetünk be, melyek befolyásolhatják a kereslet-kínálati viszonyokat. Legyenek ezek C, ami a vásárlók jövedelmének, illetve L, ami a termelő munkaerőköltségének felel meg. Újabb piackutatás alapján a fenti új változók bevezetése után a kapott lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} Q &= 5C - 2P \\ Q &= 500 + 3P - 10L \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer jóval bonyolultabb, mint az előző, ugyanis végtelen sok megoldása van. Az ilyen egyenletrendszerekre úgy érdemes gondolni, hogy azok összefüggéseket hoznak létre a bennük szereplő változók között — a célunk ezen összefüggések meghatározása.

$$
\begin{aligned}
Q &= 5C - 2P \\
Q &= 500 + 3P - 10L
\end{aligned}
$$

Az egyenletrendszerre tekinthetünk úgy, hogy az meghatározza a termelt túrógombóc-mennyiséget és árat (Q és P) a vásárlói jövedelmek és munkaerőköltség függvényében (C és L). Ebben az esetben az összefüggés:

$$
\begin{aligned}
Q &= 4C - 2L + 100 \\
P &= C + 2L - 100
\end{aligned}
$$

Ez azt jelenti, hogy a C és L változóknak bármilyen értéket adva, a Q és P értékét a fenti formulákkal meghatározva, az egyenletrendszernek egy megoldását kapjuk.

Van-e olyan módszer, amely egy adott lineáris egyenletrendszer esetén segít meghatározni az összes összefüggést a változók között? Természetesen van ilyen módszer, de ahhoz először matematikai precizitással definiálni kell, hogy mit értünk egyenletrendszeren, illetve annak megoldásán...

Definíció (Lineáris egyenletrendszer).

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az alábbi objektumot:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{array}\right.$$

ahol

$x_1, \ldots, x_m$ az ismeretlenek (vagy változók),

az a_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ valós számok az együtthatók,

a $b_1, \ldots, b_n$ valós számok a konstansok.

Definíció (Lineáris egyenletrendszer konkrét megoldása).

Az előbbi lineáris egyenletrendszer konkrét megoldásán egy olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ valós szám m-est értünk, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe, minden egyenlőség teljesül:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1m}s_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}s_1 & + & a_{n2}s_2 & + & \cdots & + & a_{nm}s_m & = & b_n. \end{array}\right.$$

Definíció (Lineáris egyenletrendszer (együttható)mátrixa).

Az

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer (együttható)mátrixa az alábbi $(n \times m)$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit tartalmazza.

Definíció (Lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixa).

Az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{array}\right.$$

lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixa (vagy bővített mátrixa) az alábbi $(n \times (m+1))$-es valós mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right),$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit és a konstansokat tartalmazza.

Cramer-szabály

Definíció (szabályos lineáris egyenletrendszer).

Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer szabályos, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlen száma megegyezik, azaz mátrixa négyzetes, továbbá mátrixának determinánsa nem 0.

Tétel (Cramer-szabály).

Ha az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{array}\right.$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely …

Tétel (Cramer-szabály (folyt.)).

..., amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \le i \le n).$$

Tehát a fenti tétel (Cramer-szabály) azt mondja ki, hogy pontosan egy megoldás létezik, azaz az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek: x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i-edik oszlopot kicseréljük a konstansok oszlopával.

Példa.

Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \quad \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$$

egyenletredszert Cramer-szabállyal, ha lehetséges.

A Cramer-szabály nem alkalmazható, mert az egyenletrendszer mátrixa nem szabályos.

Példa.

Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

egyenletredszert Cramer-szabállyal, ha lehetséges

A Cramer-szabály nem alkalmazható, az egyenletrendszer mátrixa ugyan négyzetes, de determinánsa 0.

Példa.

Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad = -1. \end{cases}$$

egyenletredszert Cramer-szabállyal, ha lehetséges

Az egyenletrendszer mátrixa négyzetes, determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

így szabályos az egyenletrendszer. Alkalmazható a Cramer-szabály.

A lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_1 = \frac{-10}{13},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_2 = \frac{7}{13},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_3 = \frac{1}{13},$$

FONTOS!!!

- A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer nem ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz.
- A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az előző feltétel teljesül, azonban az együtthatómátrix determinánsa 0.

Általános lineáris egyenletrendszerek

Definíció (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

Egyenletrendszer általános megoldásán konkrét megoldásainak összességét értjük.

Probléma: Hogyan lehet megadni a konkrét megoldások összességét?
Megoldás: Hamarosan kiderül, hogy lineáris egyenletrendszer tetszőleges konkrét megoldása megkapható úgy, hogy az ismeretlenek közül bizonyosak értékét „ügyesen” megválasztjuk, majd a többi ismeretlen értékét ezek segítségével számítjuk ki. A fenti eljárás uniformmá tehető.

Példa.

Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldása: $(11, -6, 0, 4)$. Az egyenletrendszer (egy) általános megoldása:

$$x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4 \quad (x_3 \in \mathbb{R}).$$

Az x_1, x_2 és x_4 ismeretlenek [változók] a kötött ismeretlenek [változók]. Az x_3 ismeretlen [változó] pedig szabad ismeretlen [változó]. A fent említett konkrét megoldást pedig úgy kapjuk meg, hogy a szabad ismeretlennek az $x_3 = 0$ értéket választjuk.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 + x_4, \\ x_3 = 1 - 1/3x_1 + 2/3x_4, \\ x_4 = 3 - x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Az általános megoldáshoz nem így jutunk el!!!

Fontos látni a fő különbséget az egyenletrendszer és az általános megoldás között: a megoldásban szereplő szabad ismeretlenek szabadon választhatók, és alkalmas választással minden egyes konkrét megoldás megkapható.

Tétel (Lineáris egyenletrendszer általános megoldása).

Ha egy lineáris egyenletrendszernek van megoldása, akkor az általános megoldása mindig megadható olyan alakban, hogy meghatározzuk a **kötött** és **szabad** ismeretleneket.
A szabad ismeretlenek értékei egymástól függetlenül és szabadon választhatók, ha nekik értéket adtunk, akkor a kötött ismeretlenek értéke már egyértelműen meghatározott.

A megoldás része az is, hogy kifejezzük a kötött ismeretleneket a szabad ismeretlenek segítségével. Fontos, hogy a szabad, illetve kötött ismeretlenek nem egyértelműek: az általános megoldást általában többféleképpen is meg lehet adni!

Példa.

Az

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek az alábbiak mindegyike általános megoldása:

(1) $x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4, \qquad (x_3 \in \mathbb{R})$

(2) $x_1 = \frac{13}{2} - \frac{3}{4}x_2, \quad x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_2, \quad x_4 = 4, \qquad (x_2 \in \mathbb{R})$

(3) $x_2 = \frac{26}{3} - \frac{4}{3}x_1, \quad x_3 = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}x_1, \quad x_4 = 4, \qquad (x_1 \in \mathbb{R})$.

Elemi átalakítások

Definíció (Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai).

Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Elemi átalakítások

Definíció (Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai).

Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ |+(-5)\times[1.] \\ \\ \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & - & 10x_2 & + & 28x_3 & - & 19x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & - & 10x_2 & + & 28x_3 & - & 19x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \quad \vert + (-2) \times [1.] \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & - & 10x_2 & + & 28x_3 & - & 19x_4 & = & -12 \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

Elemi átalakítások

Definíció (Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai).

Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- egyenlet szorzása 0-tól különböző valós számmal.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 & \\ & \color{red}{-} & \color{red}{10x_2} & \color{red}{+} & \color{red}{28x_3} & \color{red}{-} & \color{red}{19x_4} & = & \color{red}{-12} & \quad \mid \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 & \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{28}{10}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{12}{10} \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 & \\ & & x_2 & - & \frac{28}{10}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{12}{10} & \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 & \mid +3\times[2.] \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 & \\ & & x_2 & - & \frac{14}{5}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{6}{5} & \\ & & & & \frac{3}{5}x_3 & + & \frac{77}{10}x_4 & = & -\frac{7}{5} & \mid \cdot\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{14}{5}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{6}{5} \\ & & & & x_3 & + & \frac{77}{6}x_4 & = & -\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

$$x_3 = -\frac{7}{3} - \frac{77}{6}x_4,$$
$$x_2 = \frac{6}{5} + \frac{14}{5}x_3 - \frac{19}{10}x_4 = -\frac{16}{3} - \frac{227}{6}x_4,$$
$$x_1 = 3 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 + \frac{19}{2}x_4,$$

ahol x_4 tetszőleges valós szám (az x_4 változó szabad, x_1, x_2, x_3 pedig kötött változók).

A kísérlet eredménye az, hogy

- az elemi átalakítások nem változtatják meg az egyenletrendszer konkrét megoldásait,
- az elemi átalakítások segítségével megkapható a lineáris egyenletrendszerek általános megoldása,
- sokat írtunk feleslegesen.

Elemi átalakítások 2.

Definíció (Mátrixok elemi átalakításai).

Mátrixok elemi átalakításai a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{[1.]\leftrightarrow[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]+(-5)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 28 & -19 & -12 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[3.]+(-2)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 28 & -19 & -12 \\ 0 & -3 & 9 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]\cdot(-1/10)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -28/10 & 19/10 & 12/10 \\ 0 & -3 & 9 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & -3 & 9 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{[3.]+3\times[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & 77/10 & -7/5 \end{array}\right)$$

$$\overset{[3.]\cdot 5/3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 77/6 & -7/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\cdots}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -19/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 227/6 & -16/3 \\ 0 & 0 & 1 & 77/6 & -7/3 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2 + \frac{19}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{16}{3} - \frac{227}{6}x_4, \quad x_3 = -\frac{7}{3} - \frac{77}{6}x_4$$

Definíció (Lépcsős alakú mátrixok).

Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor lépcsős alakú. Tegyük fel, hogy a nem a zérusmátrix. Ekkor A lépcsős alakú, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{\mathbf{i_1 j_1}} = a_{\mathbf{i_2 j_2}} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem "hátrébb" van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \rule{2cm}{0.3cm} & 0 & \rule{1.2cm}{0.3cm} \\
0 & \dots & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \rule{2cm}{0.3cm} & \vdots & \rule{1.2cm}{0.3cm} \\
0 & \dots & & & & & 0 & \boxed{1} & \rule{2cm}{0.3cm} & 0 & \rule{1.2cm}{0.3cm} \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots & \\
0 & \dots & & & & & & & & 0 & \\
0 & \dots & & & & & & & 0 & \boxed{1} & \rule{1.2cm}{0.3cm} \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

A $\boxed{1}$-sel jelölt elemek a vezéregyesek.

Gauss-elimináció

Tétel.

Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Mátrixok lépcsős alakja nem egyértelmű.

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan szabályos lineáris egyenletrendszer, amely általános megoldása tartalmaz szabad változót.

Hamis. A Cramer-szabály alapján, ha szabályos a lineáris egyenletrendszer, akkor pontosan egy megoldása van, így nincs szabad változó.

- Van olyan lineáris egyenletrendszer, amely nem szabályos, és pontosan egy megoldása van.

Igaz, pl: $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \end{array}$.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Tetszőleges lineáris egyenletrendszer esetén melyik állítás igaz?

(a) Bármelyik ismeretlen lehet szabad.
(b) Mindig van szabad ismeretlen.
(c) Ha van szabad ismeretlen, akkor értéke teszőleges valós szám lehet.
(d) Legalább annyi egyeletnek lenni kell, ahány ismeretlen van.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Tetszőleges lineáris egyenletrendszer esetén melyik állítás igaz?

(a) Bármelyik ismeretlen lehet szabad.

(b) Mindig van szabad ismeretlen.

(c) Ha van szabad ismeretlen, akkor értéke teszőleges valós szám lehet.

(d) Legalább annyi egyeletnek lenni kell, ahány ismeretlen van.

A (c) állítás az igaz.