Tudnivalók

- **A zárthelyi dolgozatban 6-7 feladat lesz.**
- A dolgozatot kék vagy fekete színű tollal írják. Tollon kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- Aki nem megengedett segédeszközt használ vagy a dolgozatírás alatt Hallgatótársaival kommunikál, nem folytathatja a dolgozat írását, dolgozatára 0 pontot fog kapni (a dolgozat pótlása ebben az esetben nem lehetséges), és azon jogát is elveszti, hogy a gyakorlati jegyét vizsgajegyként fogadtathassa el.
- A dolgozatírás alatt a termet nem hagyhatják el. Aki elhagyja a termet, az nem folytathatja a dolgozatírást.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre, a közös kezdéstől számítva.

1. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(2,-3,-2,3),(1,-2,-1,0),(-1,2,1,-2),(0,1,0,-3)$$

vektorrendszerének rangját, és döntse el, hogy lineárisan független-e, generátorrendszer-e, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. (x pont)

EREDMÉNY. A vektorrendszer rangja 3, lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

2. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V=\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(1,-1,2,3),(2,-1,3,7),(1,-1,a^2+a,4),(1,-1,2,a^2+2)$$

vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e. (x pont)

EREDMÉNY. A vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független / generátorrendszer / bázis, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}$.

3. Feladat. Adja meg a v vektor koordinátasorát a V vektortér megadott bázisában:

(a) $V=\mathbb{R}^2$, $v=(1,3)$, bázis: $(-2,3),(1,0)$;

(b) $V=\mathbb{R}^3$, $v=(3,0,1)$, bázis: $(1,-2,1),(3,0,-1),(3,3,3)$.

(x pont)

EREDMÉNY. (a) $v=1\cdot(-2,3)+3\cdot(1,0)$, így v koordinátasora $(1,3)$;
(b) $v=\frac{1}{2}\cdot(1,-2,1)+\frac{1}{2}\cdot(3,0,-1)+\frac{1}{3}\cdot(3,3,3)$, így v koordinátasora $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

4. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját, valamint adjon meg bennük egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

(a) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-3&3&-6\end{pmatrix}$; (b) $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\-1&5&-6\end{pmatrix}$.

(x pont)

EREDMÉNY. (a) $r(A)=1$, $\left|1\right|\neq 0$; (b) $r(B)=2$, $\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$.

5. Feladat. Határozza meg az $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\-1&-1&-1&-1\\2&3&a^2+a&2\\3&7&4&a^2+2\end{pmatrix}$ mátrix rangját az a valós paraméter függvényében. (x pont)

EREDMÉNY. Az A mátrix rangja 3, ha $a \in \{-2,-1,1\}$; minden más esetben 4 a rang.

6. Feladat. Adjon meg fundamentális megoldásrendszert az

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében. (x pont)

EREDMÉNY. Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$U = \{(-1/2x_4 - 10/3x_5, -x_4 - 1/3x_5, -1/2x_4 + 5/3x_5, x_4, x_5) : x_4, x_5 \in \mathbb{R}\},$$

egy fundamentális megoldásrendszere:

$$(-1/2, -1, -1/2, 1, 0), (-10/3, -1/3, 5/3, 0, 1).$$

7. Feladat.

(a) Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

(b) Adjon meg bázist a $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(x pont)

EREDMÉNY. (a) Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. (b) Az 1 sajátértékhez tartozó altér 2-dimenziós, amelynek az $(1,0,1)$, $(-2,1,0)$ vektorrendszer egy bázisa.

8. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.).

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$; (b) $V = \mathbb{R}^2$, $2x_1^2 + 2x_2x_1 + 13x_2^2$.

(x pont)

EREDMÉNY. (a) pozitív szemidefinit: $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3 = (x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2$, kanonikus alak: y_1^2;
(b) pozitív definit: $2x_1^2 + 2x_2x_1 + 13x_2^2 = 2(x_1 - 1/2x_2)^2 + 25/2x_2^2$, kanonikus alak: $y_1^2 + y_2^2$.

9. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje $\times$-szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -2 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

○ ○ Ha $U = \{v\}$ altere a V valós vektortérnek, akkor U dimenziója 1. (Hamis)

○ ○ Ha a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 2, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független. (Hamis)

○ ○ Egy (3×3)-as valós mátrixnak legfeljebb 3 különböző sajátértéke van. (Igaz)

(6 pont)

10. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes. Jelölje $\times$-szel, amelyik helyes. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz vagy nincs válasz, 0 pont.)

(a) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszert,...

○ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.
○ ha a vektorrendszer rangja $r = k$, akkor a vektorrendszer bázis.
○ ha a vektorrendszer rangja r, akkor $r \leqslant n$.
○ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer generátorrendszer.

Az 3. válasz a helyes

(b) Legyen A $(n \times n)$-es valós mátrix.

◯ Ha $\lambda = 0$ sajátértéke A-nak, akkor $|A| = 0$.
◯ Ha λ sajátértéke A-nak, akkor $-\lambda$ is.
◯ Ha A-nak két sajátértéke van, akkor egy kétdimenziós sajátaltere van.
◯ Ha A-nak v sajátvektora, akkor $-v$ nem sajátvektora.

Az 1. válasz a helyes

(4 pont)